En los Ejercicios 11-22, indique qué simetría (si es que existe alguna) tiene la gráfica de $f(x)$. En particular ¿es f par o impar?

11. $f(x) = x^2 + 1$ **12.** $f(x) = x^3 + x$

13. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ **14.** $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ **16.** $f(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

17. $f(x) = x^2 - 6x$ **18.** $f(x) = x^3 - 2$

19. $f(x) = |x^3|$ **20.** $f(x) = |x + 1|$

21. $f(x) = \sqrt{2x}$ **22.** $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$

Dibuje las gráficas de las funciones de los Ejercicios 23-38.

23. $f(x) = -x^2$ **24.** $f(x) = 1 - x^2$

25. $f(x) = (x-1)^2$ **26.** $f(x) = (x-1)^2 + 1$

27. $f(x) = 1 - x^3$ **28.** $f(x) = (x+2)^3$

29. $f(x) = \sqrt{x} + 1$ **30.** $f(x) = \sqrt{x + 1}$

31. $f(x) = -|x|$ **32.** $f(x) = |x| - 1$

33. $f(x) = |x - 2|$ **34.** $f(x) = 1 + |x - 2|$

35. $f(x) = \dfrac{2}{x + 2}$ **36.** $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

37. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$ **38.** $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$

En los Ejercicios 39-46, f indica una función con dominio $[0, 2]$ y rango $[0, 1]$ cuya gráfica se muestra en la Figura P.55. Dibuje la gráfica de las funciones indicadas y especifique sus dominios y sus rangos.

39. $f(x) + 2$ **40.** $f(x) - 1$

41. $f(x + 2)$ **42.** $f(x - 1)$

43. $-f(x)$ **44.** $f(-x)$

45. $f(4 - x)$ **46.** $1 - f(1 - x)$

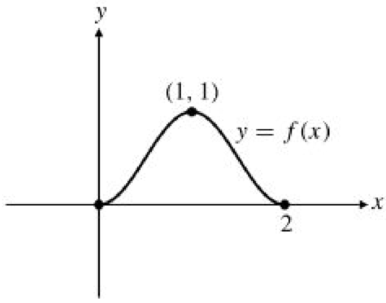

Figura P.55

En muchas ocasiones es muy difícil determinar de forma exacta el rango de una función. En los ejercicios 47-48, utilice una calculadora o un ordenador para dibujar la función f y, ampliando la gráfica, determine el rango de f con una exactitud de dos cifras decimales.

47. $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2x + 3}$ **48.** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + x}$

En los Ejercicios 49-52, dibuje mediante un ordenador o calculadora las gráficas de las funciones dadas. Examine las gráficas (ampliándolas o reduciéndolas si es necesario) y busque las simetrías. ¿Respecto a qué rectas y/o puntos son simétricas las gráficas? Intente verificar sus conclusiones algebraicamente.

49. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 1$

50. $f(x) = \dfrac{3 - 2x + x^2}{2 - 2x + x^2}$

51. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}$ **52.** $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 5}$

53. ¿Qué función $f(x)$, definida en la recta real $\mathbb{R}$, es a la vez par e impar?

P.5 Combinación de funciones para crear otras nuevas

Las funciones se pueden combinar de diversas formas para crear otras nuevas. En esta sección examinaremos las combinaciones que se obtienen

(a) Mediante operaciones algebraicas: sumando, restando, multiplicando y dividiendo funciones.
(b) Mediante composición; es decir, construyendo funciones de funciones.
(c) Agrupando funciones definidas en dominios diferentes.

Sumas, diferencias, productos, cocientes y múltiplos

Como los números, las funciones se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir (excepto donde el denominador valga cero), para producir nuevas funciones.

DEFINICIÓN 3

Sean f y g dos funciones. Para todo punto x perteneciente a los dominios de f y g, las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g se definen mediante las fórmulas

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad \text{donde } g(x) \neq 0$$

Un caso especial en la regla para multiplicar funciones es el de la multiplicación de funciones por constantes. Si c es un número real, entonces la función cf se define así, para todos los puntos x en el dominio de f:

$$(cf)(x) = cf(x)$$

Ejemplo 1 La Figura P.56(a) muestra la gráfica de $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 1$ y de su suma $(f+g)(x) = x^2 + x - 1$. Obsérvese que la altura de la gráfica de $f+g$ en cualquier punto es la suma de las alturas de las gráficas de f y g en dicho punto.

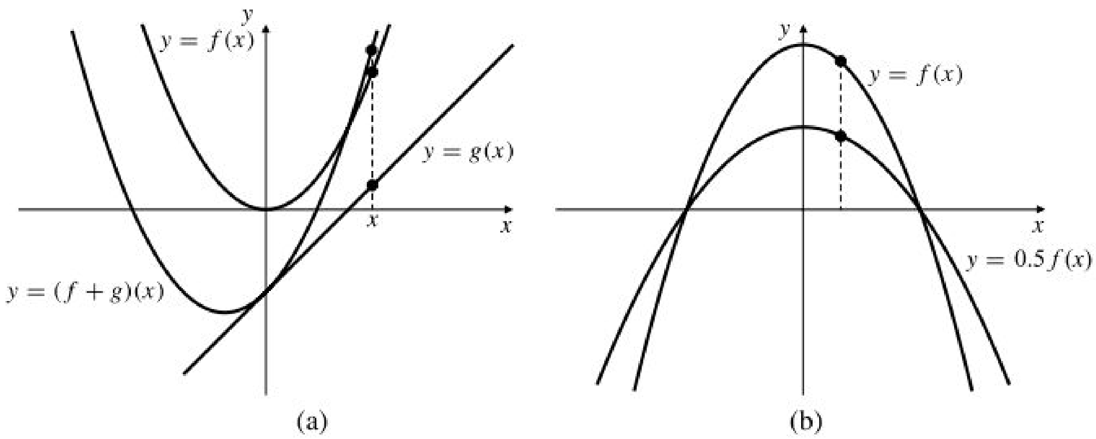

Figura P.56 (a) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
(b) $g(x) = (0.5)\,f(x)$.

Ejemplo 2 La Figura P.56(b) muestra la gráfica de $f(x) = 2 - x^2$ y de su múltiplo $g(x) = (0.5)\,f(x)$. Nótese que la altura de la gráfica de g en cada punto es la mitad de la altura de la gráfica de f.

Ejemplo 3 Las funciones f y g se definen por las fórmulas

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{1-x}$$

Obtenga las fórmulas para calcular los valores de $3f$, $f+g$, $f-g$, fg, f/g y g/f en x, y especifique los dominios de cada una de esas funciones.

Solución La información se presenta en la Tabla 2.

Tabla 2. Combinaciones de f y g y sus dominios

Función	Fórmula	Dominio
f	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
g	$g(x) = \sqrt{1-x}$	$(-\infty, 1]$
$3f$	$(3f)(x) = 3\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$f+g$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
$f-g$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$	$[0, 1]$
fg	$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{x(1-x)}$	$[0, 1]$
f/g	$\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$	$[0, 1)$
g/f	$\dfrac{g}{f}(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$	$(0, 1]$

Nótese que la mayoría de las combinaciones de f y g tienen como dominio

$$[0, \infty) \cap (-\infty, 1] = [0, 1]$$

es decir, la intersección de los dominios de f y g. Sin embargo, los dominios de los cocientes f/g y g/f deben restringirse eliminando los puntos donde los denominadores valgan cero. ■

Composición de funciones

Existe otro método, denominado **composición**, con el que se pueden combinar dos funciones para formar una nueva función.

DEFINICIÓN 4 **Composición de funciones**

Sean f y g dos funciones. La función **compuesta** $f \circ g$ se define

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ está formado por los números x del dominio de g para los que los valores $g(x)$ pertenecen al dominio de f. En particular, si el rango de g está incluido en el dominio de f, entonces el dominio de $f \circ g$ coincide con el dominio de g.

Como se muestra en la Figura P.57, formar $f \circ g$ es equivalente a encadenar las «máquinas de función» f y g en una «cadena de montaje» de forma que la salida de g sea la entrada de f.

Para calcular $f \circ g(x) = f(g(x))$ primero se calcula $g(x)$ y después se aplica la función f al resultado. La función g se denomina función *interna* y la función f, función *externa* de la composición. Por supuesto, se puede calcular también la composición $g \circ f(x) = g(f(x))$, donde f es entonces la función interna, que se calcula primero, y g la función externa, que se calcula después. Las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son en general bastante diferentes, como muestra el siguiente ejemplo.

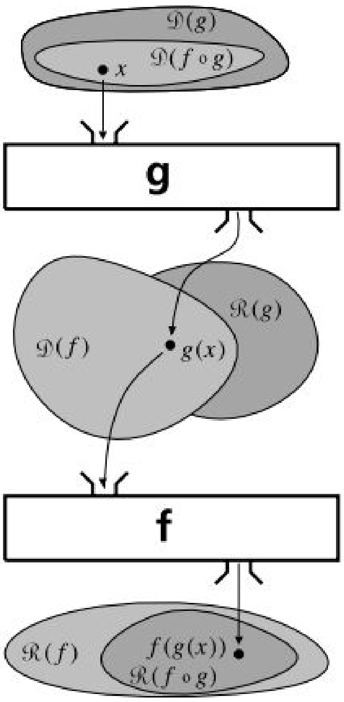

Figura P.57 $f\circ g(x) = f(g(x))$.

Ejemplo 4 Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 1$, calcule las cuatro funciones compuestas $f\circ g(x)$, $g\circ f(x)$, $f\circ f(x)$ y $g\circ g(x)$, y especifique los dominios de cada una de ellas.

Solución De nuevo, los resultados se recogen en una tabla.

Tabla 3. Composiciones de f y g y sus dominios

Función	Fórmula	Dominio
f	$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
g	$g(x) = x + 1$	$\mathbb{R}$
$f\circ g$	$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
$g\circ f$	$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
$f\circ f$	$f\circ f(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$	$[0, \infty)$
$g\circ g$	$g\circ g(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2$	$\mathbb{R}$

Para ver, por ejemplo, por qué el dominio de $f\circ g$ es $[-1, \infty)$, obsérvese que $g(x) = x + 1$ está definida para todos los números reales x, pero pertenece al dominio de f sólo si $x + 1 \geqslant 0$, es decir, si $x \geqslant -1$. ■

Ejemplo 5 Dada $G(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, calcule $G\circ G(x)$ y especifique su dominio.

Solución Calculamos

$$G\circ G(x) = G(G(x)) = G\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \dfrac{1-x}{1+x}}{1 + \dfrac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x-1+x}{1+x+1-x} = x$$

Dado que la función resultante, x, está definida para todos los reales x, podemos estar tentados de pensar que el dominio de $G \circ G$ está formado por todos los reales. ¡Esto es incorrecto! Para pertenecer al dominio de $G \circ G$, x debe satisfacer dos condiciones:

(i) x debe pertenecer al dominio de G.

(ii) $G(x)$ debe pertenecer al dominio de G.

El domino de G está formado por todos los números reales *excepto* $x = -1$. Si se excluye el punto $x = -1$ del dominio de $G \circ G$, se cumplirá la condición (i). Obsérvese ahora que la ecuación $G(x) = -1$ no tiene solución x, ya que es equivalente a $1 - x = -(1 + x)$, o $1 = -1$. Por lo tanto, todos los números $G(x)$ pertenecen al dominio de G, y la condición (ii) se satisface sin ninguna restricción sobre la x. El dominio de $G \circ G$ es $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, es decir, todos los números reales excepto -1.

Funciones definidas por tramos

Algunas veces es necesario definir una función utilizando diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. Un ejemplo es la función valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Presentaremos otros ejemplos a continuación. Nótese el uso de puntos rellenos o vacíos en las gráficas para indicar, respectivamente, si los extremos pertenecen o no pertenecen a la parte correspondiente de la gráfica.

Ejemplo 6 **La función de Heaviside.** La función de Heaviside (o función escalón unidad, *véase* la Figura P.58) se define como

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La función $H(t)$ se puede utilizar, por ejemplo, para modelar el voltaje aplicado a un circuito eléctrico por una batería de un voltio si el interruptor del circuito se cierra en el instante $t = 0$.

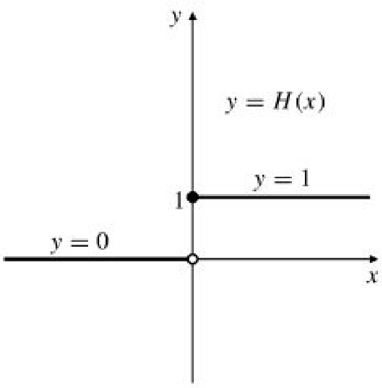

Figura P.58 La función de Heaviside.

Ejemplo 7 **La función signo.** La función signo (*véase* la Figura P.59) se define como

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \text{indefinida} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

El valor de sgn (x) indica si x es positivo o negativo. Como 0 no es positivo ni negativo, sgn (0) no está definido. La función signo es una función impar.

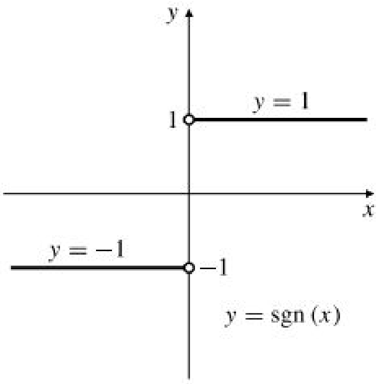

Figura P.59 La función signo.

Ejemplo 8 La función

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si} \quad x < -1 \\ -x & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

está definida en toda la recta real, pero sus valores están definidos por fórmulas diferentes en función de la posición de x. Su gráfica se muestra en la Figura P.60(a).

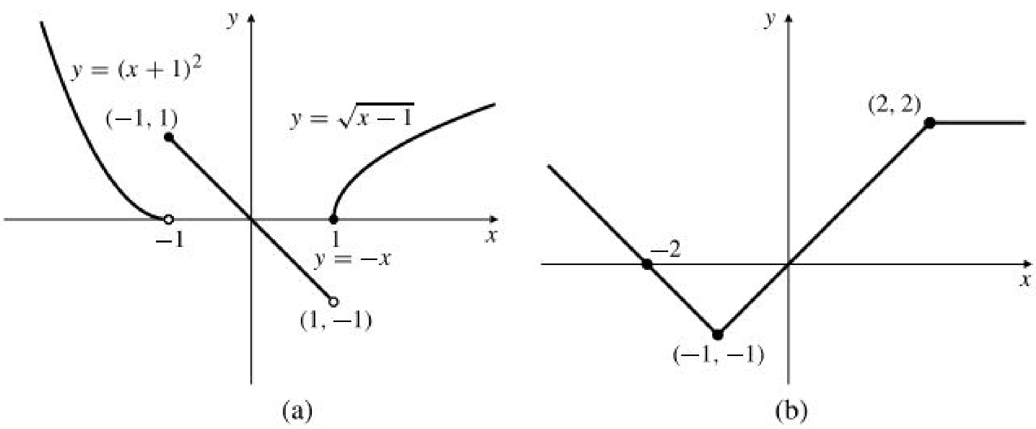

Figura P.60 Funciones definidas por tramos.

Ejemplo 9 Obtenga la fórmula de la función que se muestra en la Figura P.60(b).

Solución La gráfica está formada por tres rectas. Para $x < -1$, la recta tiene pendiente -1 y ordenada en el origen -2. Por tanto, su ecuación es $y = -(x+2)$. La sección intermedia es la recta $y = x$, para $-1 \leqslant x \leqslant 2$. La sección de la derecha es la recta $y = 2$ para $x > 2$. Combinando estas fórmulas, podemos escribir

$$g(x) = \begin{cases} -(x+2) & \text{si} \quad x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

A diferencia del ejemplo anterior, aquí no importa cuál de las posibles fórmulas se utiliza para definir $g(-1)$, ya que ambas dan el mismo valor. Lo mismo es aplicable a $g(2)$.

Las dos funciones siguientes se pueden definir utilizando fórmulas diferentes en cada intervalo entre enteros consecutivos, pero las definiremos de una forma más sencilla.

Ejemplo 10 **La función máximo entero menor.** La función cuyo valor en cualquier número x es el *máximo entero menor o igual que* x se denomina **función máximo entero menor** o **función suelo entero**. Se representa por medio de $\lfloor x \rfloor$, o también, en algunos libros, $[x]$ o $[[x]]$. La gráfica de $y = \lfloor x \rfloor$ se muestra en la Figura P.61(a). Obsérvese que

$$\lfloor 2.4 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1.9 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor -1.2 \rfloor = -2,$$
$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0.2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0.3 \rfloor = -1, \quad \lfloor -2 \rfloor = -2$$

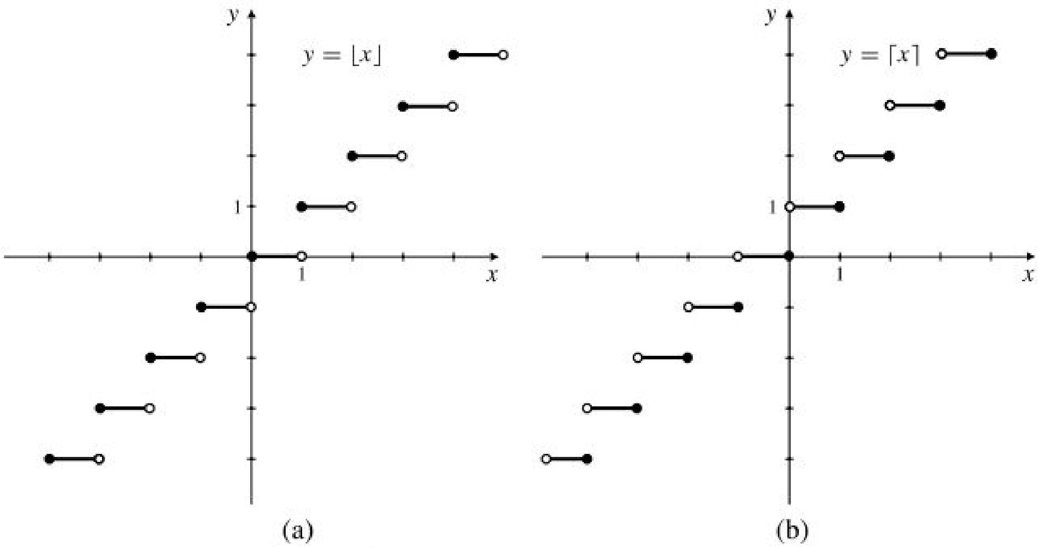

Figura P.61 (a) La función máximo entero menor $\lfloor x \rfloor$.
(b) La función mínimo entero mayor $\lceil x \rceil$.

Ejemplo 11 **La función mínimo entero mayor.** La función cuyo valor en cualquier número x es el *mínimo entero mayor o igual que* x se denomina **función mínimo entero mayor** o **función techo entero**. Se denota como $\lceil x \rceil$. La gráfica de $y = \lceil x \rceil$ se muestra en la Figura P.61(b). Para valores positivos de x esta función podría representar, por ejemplo, el coste de aparcar x horas en un aparcamiento que cobrara 1 € por cada hora o fracción de hora.

Ejercicios P.5

En los Ejercicios 1 y 2, calcule los dominios de las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g y g/f, y exprese las fórmulas de sus valores.

1. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

2. $f(x) = \sqrt{1-x}, \quad g(x) = \sqrt{1+x}$

Dibuje las gráficas de las funciones de los Ejercicios 3-6 combinando las gráficas de las funciones más simples que las constituyen.

3. $x - x^2$ **4.** $x^3 - x$

5. $x + |x|$ **6.** $|x| + |x-2|$

7. Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 3$, calcule lo siguiente:

(a) $f \circ g(0)$ (b) $g(f(0))$
(c) $f(g(x))$ (d) $g \circ f(x)$
(e) $f \circ f(-5)$ (f) $g(g(2))$
(g) $f(f(x))$ (h) $g \circ g(x)$

En los Ejercicios 8-10, construya las funciones compuestas

(a) $f \circ f(x)$ (b) $f \circ g(x)$
(c) $g \circ f(x)$ (d) $g \circ g(x)$

8. $f(x) = 2/x, \qquad g(x) = x/(1-x)$

9. $f(x) = 1/(1-x), \qquad g(x) = \sqrt{x-1}$

10. $f(x) = (x+1)/(x-1), \qquad g(x) = \operatorname{sgn}(x)$

Calcule las casillas que faltan en la Tabla 4 (Ejercicios 11-16).

Tabla 4.

	$f(x)$	$g(x)$	$f \circ g(x)$
11.	x^2	$x+1$	
12.		$x+4$	x
13.	$\sqrt{x}$		$\lvert x\rvert$
14.		$x^{1/3}$	$2x+3$
15.	$(x+1)/x$		x
16.		$x-1$	$1/x^2$

17. Utilice una herramienta gráfica para examinar en orden las gráficas de las funciones

$$y = \sqrt{x}, \qquad y = 2 + \sqrt{x},$$
$$y = 2 + \sqrt{3+x}, \qquad y = 1/(2 + \sqrt{3+x})$$

Describa los efectos que producen en la gráfica los cambios realizados en la función en cada etapa.

18. Repita el ejercicio anterior con las funciones

$$y = 2x, \qquad y = 2x - 1, \qquad y = 1 - 2x,$$
$$y = \sqrt{1-2x}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} - 1$$

Los Ejercicios 19-24 se refieren a la función con dominio [0, 2] y rango [0, 1] cuya gráfica se muestra en la Figura P.62. Dibuje las gráficas de las funciones que se indican, y especifique sus dominios y rangos.

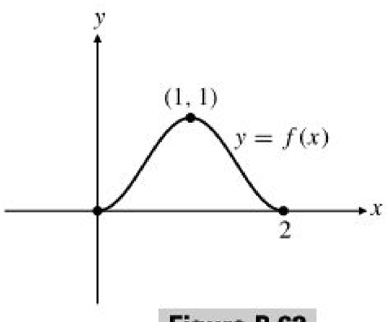

Figura P.62

19. $2\,f(x)$

20. $-(1/2)\,f(x)$

21. $f(2x)$

22. $f(x/3)$

23. $1 + f(-x/2)$

24. $2\,f((x-1)/2)$

En los Ejercicios 25-26, dibuje las gráficas de las funciones dadas.

25. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

26. $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$

27. Calcule todos los valores de las constantes reales A y B para los que la función $F(x) = Ax + B$ cumple

(a) $F \circ F(x) = F(x)$ para todo x.

(b) $F \circ F(x) = x$ para todo x.

Funciones máximo entero menor y mínimo entero mayor

28. ¿Para qué valores de x es $\lfloor x \rfloor = 0$? ¿Y $\lceil x \rceil = 0$?

29. ¿Qué números reales cumplen la ecuación $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$?

30. Verdadero o falso: ¿$\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$ para todo número real x?

31. Dibuje la gráfica de $y = x - \lfloor x \rfloor$.

32. Dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ \lceil x \rceil & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

¿Por qué se llama esta función *parte entera de x*?

Funciones pares e impares

33. Suponga que f es una función par, g es una función impar y que tanto f como g están definidas en toda la recta real. Las siguientes funciones ¿son pares, impares o ninguna de las dos cosas?

$$f + g, \quad fg, \quad f/g, \quad g/f, \quad f^2 = ff, \quad g^2 = gg$$
$$f \circ g, \quad g \circ f, \quad f \circ f, \quad g \circ g$$

34. Demuestre que si f es una función par e impar, entonces debe cumplirse que $f(x) = 0$ en todo punto de su dominio.

35. Sea f una función con dominio simétrico respecto al origen, es decir, si x pertenece a su dominio, $-x$ también pertenece.

(a) Demuestre que f se puede expresar como la suma de una función par y una función impar:

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

siendo E una función par y O una función impar. *Sugerencia*: Forme $E(x) = (f(x) + f(-x))/2$. Demuestre que $E(x) = E(-x)$, por lo que E será par. Demuestre después que $O(x) = f(x) - E(x)$ es una función impar.

(b) Demuestre que sólo existe una forma de escribir f como la suma de una función par y una función impar. *Sugerencia*: Una forma está dada en el apartado (a). Si pudiera expresarse también $f(x) = E_1(x) + O_1(x)$, siendo E_1 una función par y O_1 una función impar, entonces $E - E_1 = O_1 - O$, y utilice después el Ejercicio 34 para demostrar que $E = E_1$ y $O = O_1$.

P.6 Polinomios y funciones racionales

Los polinomios se encuentran entre las funciones más sencillas de tratar en cálculo. Son sumas de términos consistentes en una constante multiplicada por una potencia no negativa de la variable de la función.

DEFINICIÓN 5

Un **polinomio** es una función P cuyo valor en x se expresa como

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde las constantes a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1 y a_0 se denominan **coeficientes** del polinomio y, si $n > 0$, entonces $a_n \neq 0$. El número n, grado de la potencia más alta de x, se denomina **grado** del polinomio (el grado del polinomio cero no está definido).

Por ejemplo,

$$\begin{array}{rl} 3 & \text{es un polinomio de grado 0} \\ 2 - x & \text{es un polinomio de grado 1} \\ 2x^3 - 17x + 1 & \text{es un polinomio de grado 3} \end{array}$$

Supondremos en general que los polinomios con los que vamos a tratar son *polinomios reales*, es decir, sus coeficientes son números reales en vez del caso más general en el que son números complejos. Frecuentemente, los coeficientes serán números enteros o racionales. Los polinomios juegan un papel en el estudio de las funciones análogo al de los enteros en el estudio de los números. Por ejemplo, de la misma forma que al sumar, restar o multiplicar dos enteros se obtiene un entero, al sumar, restar o multiplicar polinomios se obtiene siempre un polinomio. Al sumar o restar polinomios, el resultado es un polinomio cuyo grado no es nunca superior al máximo grado de los dos polinomios que se combinan. Al multiplicar dos polinomios de grados m y n, el resultado es un polinomio de grado $m + n$. Por ejemplo, en el caso del producto

$$(x^2 + 1)(x^3 - x - 2) = x^5 - 2x^2 - x - 2$$

los dos factores tienen grados 2 y 3 y el resultado tiene grado 5.

De la misma forma que el cociente de dos enteros no es frecuentemente un entero, el cociente de dos polinomios frecuentemente no es un polinomio, y se denomina **función racional**.

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} \qquad \text{es una función racional}$$

Cuando se divide un entero positivo a por un entero positivo más pequeño b se obtiene un cociente entero q y un resto también entero r que cumple $0 \leqslant r < b$. Por tanto, la fracción a/b se puede escribir (de forma única) como la suma de un entero q y una fracción cuyo numerador (el resto r) es menor que el denominador b. Por ejemplo,

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}; \qquad \text{el cociente es 2, el resto es 1}$$

Análogamente, si A_m y B_n son dos polinomios de grados m y n, respectivamente, con $m > n$, la función A_m/B_n se puede expresar (de forma única) como la suma de un polinomio cociente Q_{m-n}, de grado $m - n$ y otra función racional R_k/B_n, en la que el grado del polinomio numerador, R_k (el resto de la división), es o 0 o $k < n$:

$$\frac{A_m(x)}{B_n(x)} = Q_{m-n}(x) + \frac{R_k(x)}{B_n(x)} \qquad \textbf{(El Algoritmo de División)}$$

Ejemplo 1 Escriba el algoritmo de división de $\dfrac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1}$.

Solución **MÉTODO I.** Uso de división de polinomios:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2x & -\;3 & & \\ \cline{2-5}
x^2 + 1 & 2x^3 & -\;3x^2 & +\;3x & +\;4 \\
 & 2x^3 & & +\;2x & \\ \cline{2-5}
 & & -3x^2 & +\;x & +\;4 \\
 & & -3x^2 & & -\;3 \\ \cline{3-5}
 & & & x & +\;7
\end{array}$$

Entonces

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} = 2x - 3 + \frac{x + 7}{x^2 + 1}$$

El cociente es $2x - 3$ y el resto es $x + 7$.

MÉTODO II. Se añaden términos apropiados de menor grado al numerador con grados no menores que el grado del denominador para permitir la factorización del denominador, y después se restan de nuevo esos términos.

$$\begin{aligned}
& 2x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \\
= \;& 2x^3 + 2x - 3x^2 - 3 + 3x + 4 - 2x + 3 \\
= \;& 2x(x^2 + 1) - 3(x^2 + 1) + x + 7
\end{aligned}$$

De donde se deduce inmediatamente que

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 3x + 4}{x^2 + 1} = 2x - 3 + \frac{x + 7}{x^2 + 1}$$

■

Raíces y factores

Se dice que un número r es una **raíz** de un polinomio P si $P(r) = 0$. Por ejemplo $P(x) = x^3 - 4x$ tiene tres raíces: 0, 2 y -2. Al sustituir x por cualquiera de esos tres números se cumple que $P(x) = 0$. El Teorema Fundamental del Álgebra (*véase* el Apéndice II) indica que todo polinomio de grado como mínimo 1 tiene una raíz (aunque dicha raíz puede ser un número complejo). Por ejemplo, el polinomio lineal (de grado 1) $ax + b$ tiene la raíz $-b/a$, ya que $a(-b/a) + b = 0$. Un polinomio constante (de grado cero) no puede tener raíces, a no ser que sea el polinomio cero, en cuyo caso cualquier número sería una raíz.

Los polinomios reales no tienen por qué tener raíces reales. Por ejemplo, el polinomio $x^2 + 4$ no vale cero para ningún número real x, pero sí vale cero para los números complejos $2i$ y $-2i$, donde i representa la unidad imaginaria, que cumple que $i^2 = -1$ (en el Apéndice I se consideran los números complejos). Los números $2i$ y $-2i$ son *complejos conjugados entre sí*. Los números complejos que son raíces de polinomios reales deben aparecer en pares conjugados.

En aplicaciones de cálculo resulta de utilidad factorizar polinomios en forma de productos de polinomios de grado inferior, especialmente de polinomios de grado 1 o 2 (lineales o cuadráticos). El teorema siguiente muestra la conexión entre los factores lineales y las raíces.

TEOREMA 1 **Teorema de factorización**

Un número r es una raíz de un polinomio P de grado no inferior a 1 si y sólo si $x - r$ es un factor de $P(x)$.

DEMOSTRACIÓN Por el algoritmo de división, se cumple que existe un polinomio cociente Q de grado una unidad menos que el de P y un resto de grado 0 (es decir, una constante c), tal que

$$\frac{P(x)}{x-r} = Q(x) + \frac{c}{x-r}$$

Por tanto, $P(x) = (x-r)Q(x) + c$, y $P(r) = 0$ si y sólo si $c = 0$, y en ese caso $P(x) = (x-r)Q(x)$ y, por tanto, $x - r$ es un factor de $P(x)$.

A partir del Teorema 1 y del Teorema Fundamental del Álgebra se deduce que todo polinomio de grado $n \geqslant 1$ tiene n raíces (si P es de grado $n \geqslant 2$, entonces tiene una raíz r, y $P(x) = (x-r)Q(x)$, siendo Q un polinomio de grado $n-1 \geqslant 1$, que a su vez tiene una raíz, etc.). Por supuesto, no es necesario que las raíces de un polinomio sean todas diferentes. El polinomio $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x-1)^3$ tiene cuatro raíces; una de ellas es 0 y las otras tres valen 1. Se dice que la raíz 1 tiene **multiplicidad** 3, ya que se puede dividir $P(x)$ por $(x-1)^3$ y se obtiene de resto 0.

Si P es un polinomio real que tiene una raíz compleja $r_1 = u + iv$, siendo u y v números reales y $v \neq 0$, entonces, según se ha comentado anteriormente, el complejo conjugado de r_1, es decir $r_2 = u - iv$, debe ser también una raíz de P (y además, r_1 y r_2 tendrán la misma multiplicidad). Por tanto, $x - u - iv$ y $x - u + iv$ son factores de $P(x)$ y su producto

$$(x-u-iv)(x-u+iv) = (x-u)^2 + v^2 = x^2 - 2ux + u^2 + v^2$$

es un polinomio cuadrático sin raíces reales. Se deduce, por tanto, que todo polinomio real se puede descomponer en un producto de factores lineales reales (que pueden estar repetidos) y un producto de factores cuadráticos sin raíces reales (que pueden estar repetidos).

Ejemplo 2 ¿Cuál es el grado de $P(x) = x^3(x^2 + 2x + 5)^2$? ¿Cuáles son las raíces de P, y cuál es la multiplicidad de cada raíz?

Solución Si se desarrolla la expresión de P, el máximo grado de x presente en la expresión desarrollada es $x^3(x^2)^2 = x^7$, por lo que el grado de P es 7. El factor $x^3 = (x-0)^3$ indica que 0 es una raíz de P con multiplicidad 3. Las cuatro raíces restantes serán las raíces del polinomio $x^2 + 2x + 5$, cada una de ellas con multiplicidad 2. Entonces,

$$\begin{aligned}[x^2 + 2x + 5]^2 &= [(x+1)^2 + 4]^2 \\ &= [(x+1+2i)(x+1-2i)]^2\end{aligned}$$

Por tanto, las siete raíces de P son:

$$\begin{cases} 0,\ 0,\ 0 & 0 \text{ tiene multiplicidad } 3 \\ -1-2i,\ -1-2i & -1-2i \text{ tiene multiplicidad } 2 \\ -1+2i,\ -1+2i & -1+2i \text{ tiene multiplicidad } 2 \end{cases}$$

Raíces y factores de polinomios cuadráticos

Existe una expresión bien conocida para calcular las raíces de un polinomio cuadrático.

Ecuación de segundo grado

Las dos soluciones de la ecuación cuadrática

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

siendo A, B y C constantes y $A \neq 0$, se obtienen como

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Para ver que efectivamente es así, se divide la ecuación de segundo grado por A y se completan los cuadrados en x:

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

$$x^2 + \frac{2B}{2A}x + \frac{B^2}{4A^2} = \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}$$

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$$

$$x + \frac{B}{2A} = \pm\frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

La cantidad $D = B^2 - 4AC$ que aparece dentro de la raíz cuadrada en la fórmula se denomina **discriminante** de la ecuación o polinomio de segundo grado. La naturaleza de las raíces de la ecuación de segundo grado depende del signo del discriminante.

(a) Si $D > 0$, entonces $D = k^2$ para algún valor de k y la ecuación de segundo grado posee dos raíces distintas, $(-B + k)/(2A)$ y $(-B - k)/(2A)$.

(b) Si $D = 0$, entonces la ecuación de segundo grado tiene sólo una raíz, $-B/(2A)$, la cual tiene multiplicidad 2 (se denomina *raíz doble*).

(c) Si $D < 0$, entonces $D = -k^2$ para algún valor de k y la ecuación de segundo grado posee dos raíces complejas conjugadas, $(-B + ki)/(2A)$ y $(-B - ki)/(2A)$.

Ejemplo 3 Calcule las raíces de los siguientes polinomios de segundo grado y exprese dichos polinomios como producto de sus factores lineales.

(a) $x^2 + x - 1$ (b) $9x^2 - 6x + 1$ (c) $2x^2 + x + 1$

Solución Se utiliza la fórmula de la ecuación de segundo grado para obtener las raíces de los polinomios.

(a) $A = 1, \quad B = 1, \quad C = -1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

(b) $A = 9, \quad B = -6, \quad C = 1$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{1}{3} \quad \text{(raíz doble)}$$

$$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = (3x - 1)^2$$

(c) $A = 2, \quad B = 1, \quad C = 1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4} i$$

$$2x^2 + x + 1 = 2\left(x + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4} i\right)\left(x + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} i\right)$$

Observación Existen fórmulas para calcular las raíces exactas de polinomios de grado 3 y de grado 4, pero, a diferencia de la fórmula de la ecuación de segundo grado, son muy complicadas y raramente se utilizan. El cálculo nos proporciona herramientas muy poderosas y fáciles de de utilizar para obtener aproximaciones a las raíces de polinomios (y soluciones a ecuaciones más generales), con cualquier grado de exactitud que se desee.

Factorizaciones diversas

Algunos polinomios de grado 2 y superior se pueden factorizar (al menos parcialmente) por simple inspección. Algunos ejemplos son:

(a) Factor común: $ax^2 + bx = x(ax + b)$.

(b) Diferencia de cuadrados: $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$.

(c) Diferencia de cubos: $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$.

(d) De forma más general, la diferencia de n-ésimas potencias para cualquier entero positivo n:

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

Nótese que $x - a$ es un factor de $x^n - a^n$ para todo entero positivo n.

(e) Siempre es cierto que si n es un *entero positivo impar*, entonces $x + a$ es un factor de $x^n + a^n$. Por ejemplo,

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$
$$x^5 + a^5 = (x + a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)$$

Finalmente, mencionaremos un método de prueba y error para factorización de polinomios de segundo grado, denominado *factorización trinomial*. Como

$$(x + p)(x + q) = x^2 + (p + q)x + pq$$
$$(x - p)(x - q) = x^2 - (p + q)x + pq \qquad \text{y}$$
$$(x + p)(x - q) = x^2 + (p - q)x - pq$$

es posible a veces obtener los factores de $x^2 + Bx + C$ buscando los factores de $|C|$ para los que la suma o la diferencia es B. De forma más general, a veces es posible factorizar

$$Ax^2 + Bx + C = (ax + b)(cx + d)$$

Buscando los factores a y c de A y los factores b y d de C para los que $ad + bc = B$. Por supuesto, si esto falla siempre se puede aplicar la fórmula de la ecuación de segundo grado para obtener las raíces, y por tanto los factores, de un polinomio cuadrático.

Ejemplo 4

$$\begin{array}{ll} x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) & p = 3,\ q = 2,\ pq = 6,\ p + q = 5 \\ x^2 + 7x + 6 = (x+6)(x+1) & p = 6,\ q = 1,\ pq = 6,\ p + q = 7 \\ x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) & p = 3,\ q = -2,\ pq = -6,\ p + q = 1 \\ 2x^2 + x - 10 = (2x+5)(x-2) & a = 2,\ b = 5,\ c = 1,\ d = -2 \\ & ac = 2,\ bd = -10,\ ad + bc = 1 \end{array}$$

Ejemplo 5 Calcule las raíces de los siguientes polinomios:

(a) $x^3 - x^2 - 4x + 4$ (b) $x^4 + 3x^2 - 4$ (c) $x^5 - x^4 - x^2 + x$

Solución (a) Existe un factor común obvio:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2)$$

Las raíces son 1, 2 y -2.

(b) Se trata de un trinomio en x^2 para el que existe una factorización sencilla:

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2+4)(x^2-1) = (x+2i)(x-2i)(x+1)(x-1)$$

Las raíces son 1, -1, $2i$ y $-2i$.

(c) Empezamos con unas factorizaciones obvias:

$$\begin{aligned} x^5 - x^4 - x^2 + x &= x(x^4 - x^3 - x + 1) = x(x-1)(x^3-1) \\ &= x(x-1)^2(x^2+x+1) \end{aligned}$$

Por tanto, 0 es una raíz y 1 es una raíz doble. Las dos raíces restantes son las del factor cuadrático $x^2 + x + 1$, que no se puede factorizar de forma sencilla por simple inspección, por lo que usamos la fórmula:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$$

Ejercicios P.6

En los Ejercicios 1-12, calcule las raíces de los polinomios. Si hay raíces repetidas, indique su multiplicidad. Escriba además cada polinomio en forma de producto de sus factores lineales.

1. $x^2 + 7x + 10$

2. $x^2 - 3x - 10$

3. $x^2 + 2x + 2$

4. $x^2 - 6x + 13$

5. $16x^4 - 8x^2 + 1$

6. $x^4 + 6x^3 + 9x^2$

7. $x^3 + 1$

8. $x^4 - 1$

9. $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$

10. $x^5 - x^4 - 16x + 16$

11. $x^5 + x^3 + 8x^2 + 8$

12. $x^9 - 4x^7 - x^6 + 4x^4$

En los Ejercicios 13-16, exprese las funciones racionales dadas como la suma de un polinomio con otra función racional cuyo numerador sea o bien cero, o bien de menor grado que el denominador.

13. $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 2}$

14. $\dfrac{x^2}{x^2 + 5x + 3}$

15. $\dfrac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$

16. $\dfrac{x^4 + x^2}{x^3 + x^2 + 1}$

17. Demuestre que $x - 1$ es un factor de un polinomio P de grado positivo si y sólo si la suma de los coeficientes de P es cero.

18. ¿Qué condición deberían cumplir los coeficientes de un polinomio para asegurar que $x + 1$ es un factor de dicho polinomio?

*__19.__ El conjugado de un número complejo $z = u + iv$ (siendo u y v números reales) es el número complejo $\bar{z} = u - iv$. En el Apéndice I se demuestra que el conjugado de una suma (o producto) de dos números complejos es la suma (o producto) de los conjugados.

Utilice este hecho para verificar que si $z = u + iv$ es una raíz compleja de un polinomio P con coeficientes reales, entonces su conjugado $\bar{z}$ es también una raíz de P.

*20. Continuando con el ejercicio anterior, demuestre que si $z = u + iv$ (siendo u y v números reales) es una raíz compleja de un polinomio P con coeficientes reales, entonces P debe tener el factor cuadrático $x^2 - 2ux + u^2 + v^2$.

*21. Utilice el resultado del ejercicio 20 para demostrar que si $z = u + iv$ (siendo u y v números reales) es una raíz compleja de un polinomio P con coeficientes reales, entonces z y $\bar{z}$ son raíces de P con la misma multiplicidad.

P.7 Las funciones trigonométricas

Casi toda la gente se encuentra por primera vez con las cantidades $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ y a partir de la razón de la longitud de los lados de un triángulo rectángulo en el que t es el valor de uno de sus ángulos agudos. Si en un triángulo rectángulo se denominan «hip» a la hipotenusa, «ady» al cateto adyacente al ángulo t y «opu» al cateto opuesto al ángulo t (*véase* la Figura P.63), entonces

$$\cos t = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} t = \frac{\text{opu}}{\text{hip}} \qquad (*)$$

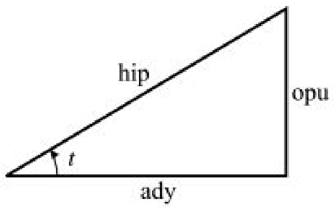

Figura P.63 $\cos t = \text{ady/hip}$. $\operatorname{sen} t = \text{opu/hip}$.

Estas razones dependen sólo del ángulo t, y no de un triángulo en particular, ya que todos los triángulos rectángulos con un ángulo agudo t son similares.

En el ámbito del cálculo son necesarias definiciones más generales de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$, como funciones definidas *para todos los números reales* t, no sólo para los ángulos agudos. Estas definiciones se establecen en función de una circunferencia, en vez de un triángulo.

Sea C una circunferencia de centro el origen O y de radio 1. Su ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. Sea A el punto $(1, 0)$ sobre C. Para todo número real t, sea P_t el punto sobre C situado a una distancia $|t|$ de A, medido sobre C en sentido contrario al de las agujas del reloj, si $t > 0$, y en el sentido de las agujas del reloj si $t < 0$. Por ejemplo, como la circunferencia mide 2π radianes, el punto $P_{\pi/2}$ representa un cuarto de vuelta de distancia desde A en la circunferencia C. Se trata del punto $(0, 1)$.

Utilizaremos esta longitud t como medida del ángulo AOP_t, como muestra la Figura P.64.

DEFINICIÓN 6

La **medida en radianes** del ángulo AOP_t es de t radianes:

$$\angle AOP_t = t \text{ radianes}$$

Estamos más acostumbrados a medir los ángulos en **grados**. Como P_π es el punto $(-1, 0)$, la mitad del camino (π radios de distancia) alrededor de la circunferencia C desde el punto A, tenemos que

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ$$

Para convertir grados en radianes se multiplican los grados por $\pi/180$, y para convertir radianes en grados se multiplican los radianes por $180/\pi$.

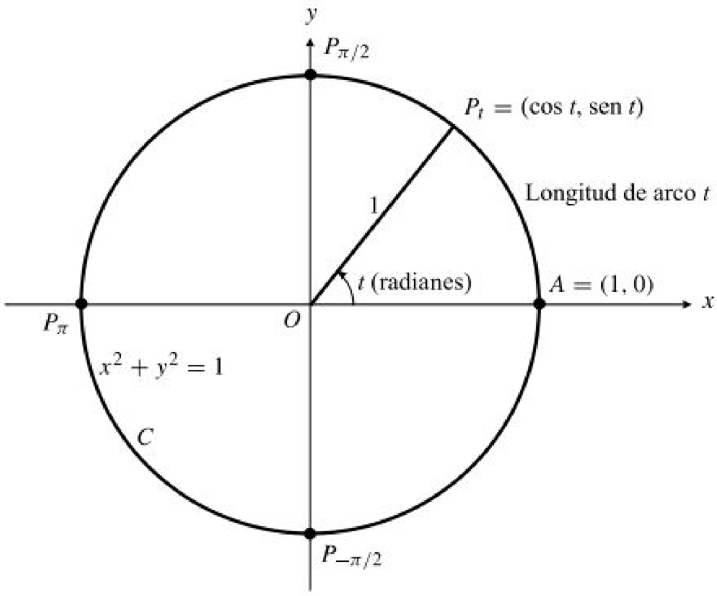

Figura P.64 Si la longitud del arco AP_t es de t radios de C, entonces el ángulo $AOP_t = t$ radianes.

Convenio para ángulos

En cálculo se supone que todos los ángulos se miden en radianes a menos que se indique explícitamente que se miden en grados o en otras unidades. Por ejemplo, al decir un ángulo de $\pi/3$, significa $\pi/3$ radianes (que equivalen a 60°), y no $\pi/3$ grados.

Ejemplo 1 **Longitud de arco y área de sector circular.** Un arco de una circunferencia de radio r abarca un ángulo t desde el centro de dicha circunferencia. Calcule la longitud s de dicho arco y el área A del sector circular comprendido entre el arco y el centro de la circunferencia.

Solución La longitud del arco s es la misma fracción de la longitud de la circunferencia $2\pi r$ que la fracción que representa t de la longitud total de la circunferencia en radianes, que es 2π (o 360°). Por tanto,

$$s = \frac{t}{2\pi}\,(2\pi r) = rt \text{ unidades}$$

De forma similar, el área A del sector circular (*véase* la Figura P.65) es la misma fracción del área total del círculo πr^2:

$$A = \frac{t}{2\pi}\,(\pi r^2) = \frac{r^2 t}{2} \text{ unidades}^2$$

(En la Sección 1.1 demostraremos que el área de un círculo de radio r es πr^2).

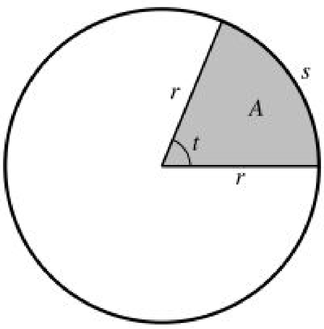

Figura P.65 Longitud del arco $x = rt$. Área del sector circular $A = r^2 t/2$.

Utilizando el procedimiento descrito anteriormente, se puede calcular el punto P_t correspondiente a cualquier número real t, positivo o negativo. Los valores $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ se definen como las coordenadas del punto P_t (*véase* la Figura P.66).

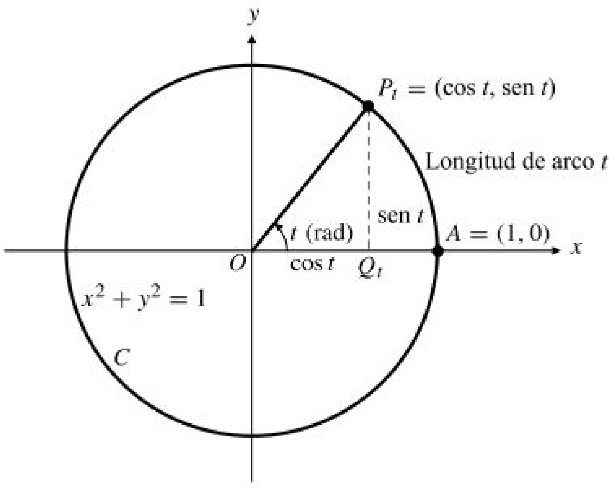

Figura P.66 Las coordenadas de P_t son $(\cos t, \operatorname{sen} t)$.

DEFINICIÓN 7 Coseno y seno

Dado un número real t, el **coseno** de t (abreviadamente, $\cos t$) y el **seno** de t (abreviadamente, $\operatorname{sen} t$) son las coordenadas x e y del punto P_t.

$$\cos t = \text{coordenada } x \text{ del punto } P_t$$
$$\operatorname{sen} t = \text{coordenada } y \text{ del punto } P_t$$

Dada la forma en que se definen, el coseno y el seno se denominan **funciones circulares**. Nótese que estas definiciones concuerdan con las dadas anteriormente en función del ángulo agudo de un triángulo rectángulo (*véanse* las fórmulas (*) al principio de esta sección). En este caso el triángulo es el P_tOQ_t, que se muestra en la Figura P.66.

Ejemplo 2 Examinando las coordenadas de $P_0 = A$, $P_{\pi/2}$, P_π y $P_{-\pi/2} = P_{3\pi/2}$ de la Figura P.67, se obtienen los siguientes valores:

$$\cos 0 = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \cos\pi = -1 \qquad \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

$$\operatorname{sen} 0 = 0 \qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \operatorname{sen}\pi = 0 \qquad \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -1$$

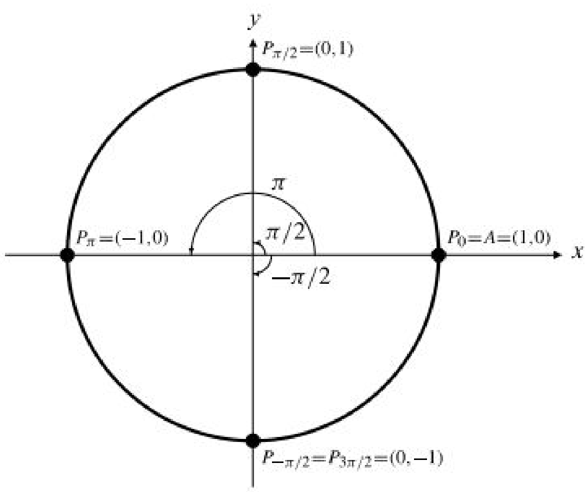

Figura P.67 Algunos ángulos especiales.

Identidades de utilidad

Muchas propiedades importantes de $\cos t$ y $\operatorname{sen} t$ se desprenden del hecho de que son las coordenadas del punto P_t sobre la circunferencia C de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Rango del coseno y del seno. Para todo número real t,

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1 \quad \text{y} \quad -1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$$

Identidad de Pitágoras. Las coordenadas $x = \cos t$ e $y = \operatorname{sen} t$, del punto P_t deben cumplir la ecuación de la circunferencia. Por tanto, para todo número real t,

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

(Nótese que $\cos^2 t$ significa $(\cos t)^2$, y no $\cos(\cos t)$. Se trata de una notación desafortunada, pero se utiliza en prácticamente toda la literatura técnica, así que tendremos que acostumbrarnos a utilizarla).

Periodicidad. Como C es una circunferencia que mide 2π radianes, sumar 2π a un valor de t hace que el punto P_t describa una vuelta completa alrededor de la circunferencia C y termine en el mismo sitio: $P_{t+2\pi} = P_t$. Por tanto, para todo t,

$$\cos(t + 2\pi) = \cos t \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t$$

Esto quiere decir que el coseno y el seno son **funciones periódicas** de periodo 2π.

El coseno es una función par. El seno es una función impar. Como la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es simétrica respecto al eje x, los puntos P_t y P_{-t} tienen la misma coordenada x, y coordenadas y opuestas (*véase* la Figura P.68).

$$\cos(-t) = \cos t \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$$

Identidades de ángulos complementarios. Dos ángulos son complementarios si suman $\pi/2$ (o 90º). Los puntos $P_{(\pi/2)-t}$ y P_t son reflexiones (uno del otro) respecto a la recta $y = x$ (Figura P.69), por lo que la coordenada x de uno de ellos es la coordenada y del otro, y viceversa. Así,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$$

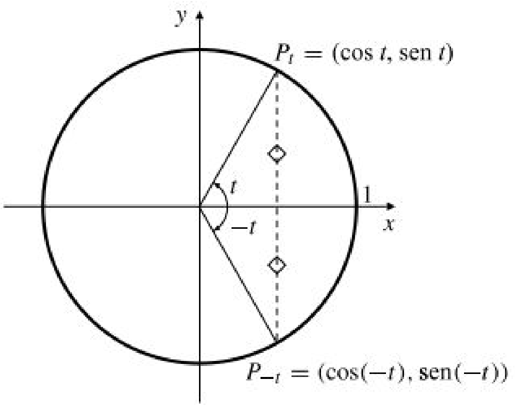

Figura P.68 $\cos(-t) = \cos t$.
$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$.

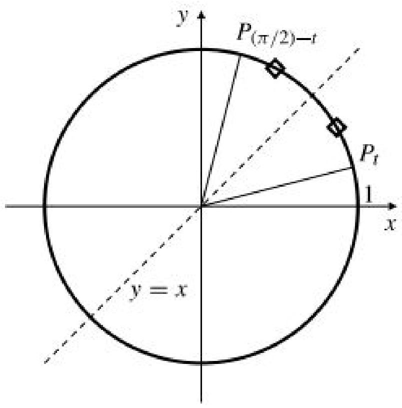

Figura P.69 $\cos((\pi/2) - t) = \operatorname{sen} t$.
$\operatorname{sen}((\pi/2) - t) = \cos t$.

Identidades de ángulos suplementarios. Dos ángulos son suplementarios si suman π (o 180°). Como la circunferencia es simétrica respecto al eje y, $P_{\pi-t}$ y P_t tienen la misma coordenada y, y coordenadas x opuestas (*véase* la Figura P.70). Entonces,

$$\cos(\pi - t) = -\cos t \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$$

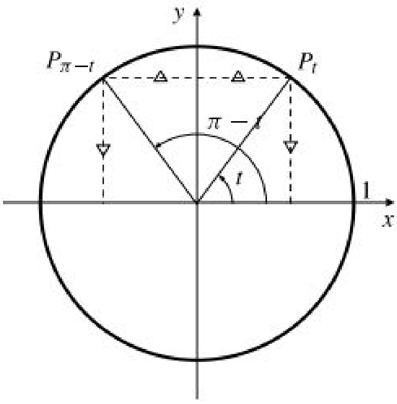

Figura P.70 $\cos(\pi - t) = -\cos t$.
$\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$.

Algunos ángulos especiales

Ejemplo 3 Calcule el seno y el coseno de $\pi/4$ (es decir, 45°).

Solución El punto $P_{\pi/4}$ está en el primer cuadrante sobre la recta $x = y$. Para calcular sus coordenadas, se sustituye $x = y$ en la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, con lo que se obtiene $2x^2 = 1$. Por tanto, $x = y = 1/\sqrt{2}$ (*véase* la Figura P.71), y

$$\cos(45°) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \operatorname{sen}(45°) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

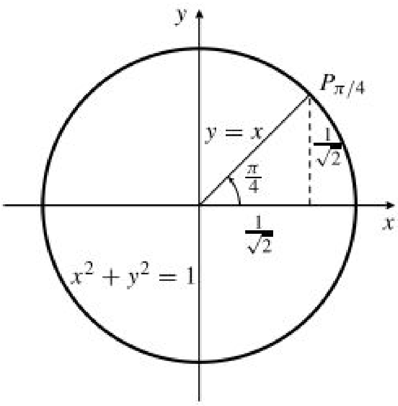

Figura P.71 $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ejemplo 4 Calcule los valores del seno y el coseno de los ángulos $\pi/3$ (o 60°) y $\pi/6$ (o 30°).

Solución El punto $P_{\pi/3}$ y los puntos $O(0, 0)$ y $A(1, 0)$ son los vértices de un triángulo equilátero cuyo lado tiene longitud 1 (*véase* la Figura P.72). Por tanto, la coordenada x del punto $P_{\pi/3}$ vale 1/2, y la coordenada y vale $\sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$, con lo que

$$\cos(60°) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen}(60°) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}$, las identidades de ángulos complementarios nos permiten obtener que

$$\cos(30^\circ) = \cos\frac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{sen}(30^\circ) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

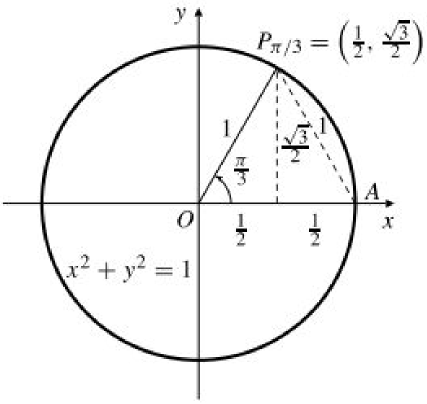

Figura P.72 $\cos \pi/3 = 1/2$.
$\operatorname{sen} \pi/3 = \sqrt{3}/2$.

La Tabla 5 resume los valores del coseno y el seno en los ángulos múltiplos de 30° y 45° entre 0° y 180°. Los valores de 120°, 135° y 150° se han obtenido utilizando las identidades de ángulos suplementarios. Por ejemplo,

$$\cos(120^\circ) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$$

Tabla 5. Cosenos y senos de algunos ángulos especiales

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

Ejemplo 5 Calcule: (a) $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ y (b) $\cos\frac{4\pi}{3}$

Solución Se pueden dibujar los triángulos adecuados en los cuadrantes donde están los ángulos, para determinar los valores requeridos. *Véase* la Figura P.73.

(a) $\operatorname{sen}(3\pi/4) = \operatorname{sen}(\pi - (\pi/4)) = 1/\sqrt{2}$.

(b) $\cos(4\pi/3) = \cos(\pi + (\pi/3)) = -\frac{1}{2}$.

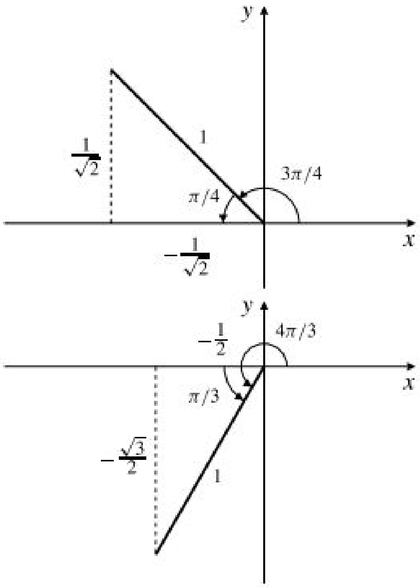

Figura P.73 Uso de triángulos situados adecuadamente para calcular funciones trigonométricas de ángulos especiales.

Aunque se pueden obtener aproximaciones decimales a los valores del seno y el coseno utilizando una calculadora científica o tablas matemáticas, es útil recordar los valores de la tabla para los ángulos 0, $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$, ya que aparecen frecuentemente en las aplicaciones.

Al tratar el seno y el coseno como funciones, las variables se pueden nombrar en la forma que deseemos (por ejemplo, x, como se hace con las otras funciones). Las Figuras P.74 y P.75 muestran las gráficas de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$. En ambas gráficas el comportamiento entre $x = 0$ y $x = 2\pi$ se repite una y otra vez a medida que nos movemos de izquierda a derecha por el eje x. Obsérvese que la gráfica de $\operatorname{sen} x$ es igual a la gráfica de $\cos x$ desplazando esta última a la derecha una distancia de $\pi/2$.

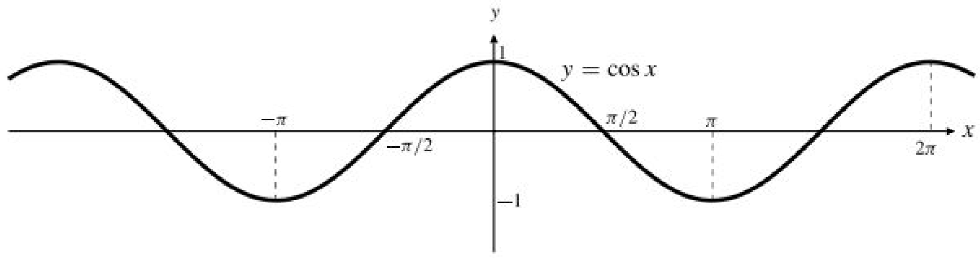

Figura P.74 Gráfica de $\cos x$.

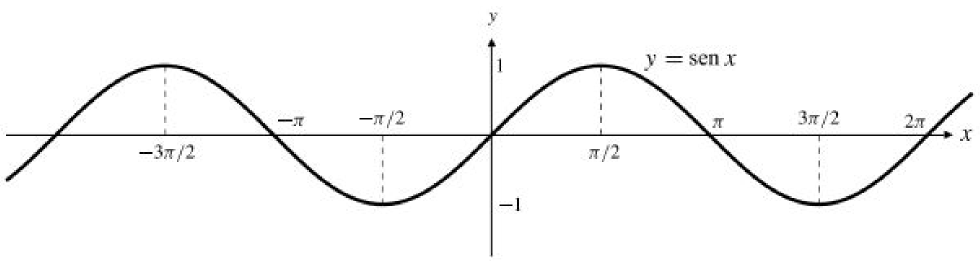

Figura P.75 Gráfica de $\operatorname{sen} x$.

¡Atención!

Cuando se utiliza una calculadora científica para calcular funciones trigonométricas, hay que asegurarse de seleccionar el modo angular apropiado: grados o radianes.

Fórmulas de sumas

Las fórmulas que siguen sirven para determinar el coseno y el seno de una suma o diferencia de dos ángulos en función de los cosenos y senos de dichos ángulos.

TEOREMA 2 Fórmulas de suma para el coseno y el seno

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$
$$\operatorname{sen}(s+t) = \operatorname{sen} s \cos t + \cos s \operatorname{sen} t$$
$$\cos(s-t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$
$$\operatorname{sen}(s-t) = \operatorname{sen} s \cos t - \cos s \operatorname{sen} t$$

DEMOSTRACIÓN Demostraremos la tercera fórmula como sigue: sean s y t números reales, y considérense los puntos

$$P_t = (\cos t, \operatorname{sen} t) \qquad P_{s-t} = (\cos(s-t), \operatorname{sen}(s-t))$$
$$P_s = (\cos s, \operatorname{sen} s) \qquad A = (1, 0)$$

como se muestra en la Figura P.76.

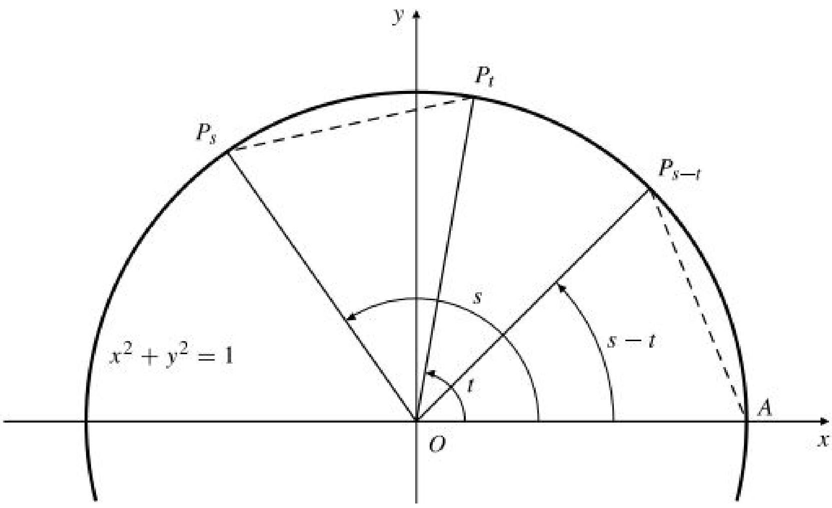

Figura P.76 $P_sP_t = P_{s-t}A$.

El ángulo $P_tOP_s = s - t$ radianes = ángulo AOP_{s-t}, y la distancia P_sP_t es igual a la distancia $P_{s-t}A$. Por tanto, $(P_sP_t)^2 = (P_{s-t}A)^2$. Si expresamos las distancias al cuadrado en función de las coordenadas, y se desarrollan los binomios correspondientes:

$$(\cos s - \cos t)^2 + (\operatorname{sen} s - \operatorname{sen} t)^2 = (\cos(s-t) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(s-t)$$

$$\cos^2 s - 2\cos s \cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 s - 2\operatorname{sen} s \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t$$
$$= \cos^2(s-t) - 2\cos(s-t) + 1 + \operatorname{sen}^2(s-t)$$

Como $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ para todo x, esto se reduce a

$$\cos(s-t) = \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

Sustituyendo t por $-t$ en la fórmula anterior, y recordando que $\cos(-t) = \cos t$ y $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, tenemos que

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t$$

Para obtener las fórmulas de suma para el seno se pueden emplear las fórmulas de ángulos complementarios:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(s+t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(s+t)\right)\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-s\right)-t\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\cos t + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-s\right)\operatorname{sen} t\\ &= \operatorname{sen} s\cos t + \cos s\operatorname{sen} t\end{aligned}$$

y la otra fórmula se sigue de nuevo si sustituimos t por $-t$.

Ejemplo 6 Calcule el valor de $\cos(\pi/12) = \cos 15^{\circ}$.

Solución

$$\begin{aligned}\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

A partir de las fórmulas de suma, se pueden obtener como casos especiales ciertas fórmulas útiles denominadas **fórmulas del ángulo doble**. Si en las fórmulas de suma de $\operatorname{sen}(s+t)$ y $\cos(s+t)$ se hace $s=t$, se obtiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2t &= 2\operatorname{sen} t\cos t \qquad \text{y}\\ \cos 2t &= \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\\ &= 2\cos^2 t - 1 \qquad (\text{usando } \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1)\\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 t\end{aligned}$$

Despejando en las dos últimas fórmulas $\cos^2 t$ y $\operatorname{sen}^2 t$ se obtiene

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$$

que se denominan **fórmulas del ángulo mitad**, ya que se utilizan para expresar relaciones trigonométricas de la mitad del ángulo $2t$. Posteriormente encontraremos estas fórmulas de utilidad cuando integremos potencias de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

Otras funciones trigonométricas

Existen otras cuatro funciones trigonométricas: tangente (tan) cotangente (cot), secante (sec) y cosecante (csc), todas ellas definidas en función del coseno y el seno. Sus gráficas se muestran en las Figuras P.77-P.80.

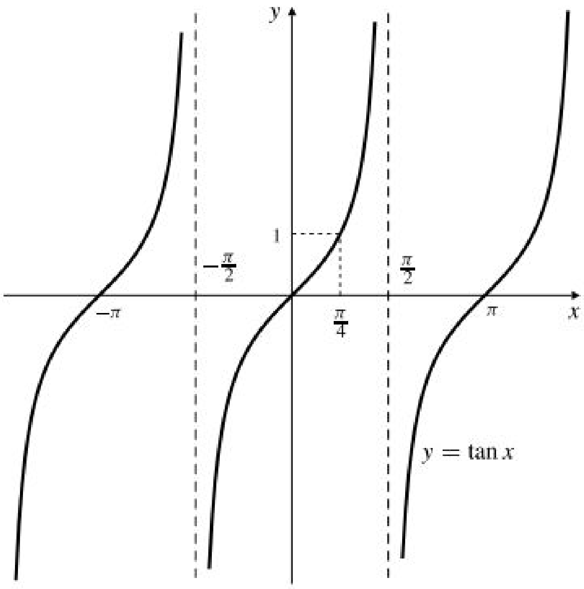

Figura P.77 Gráfica de $\tan x$.

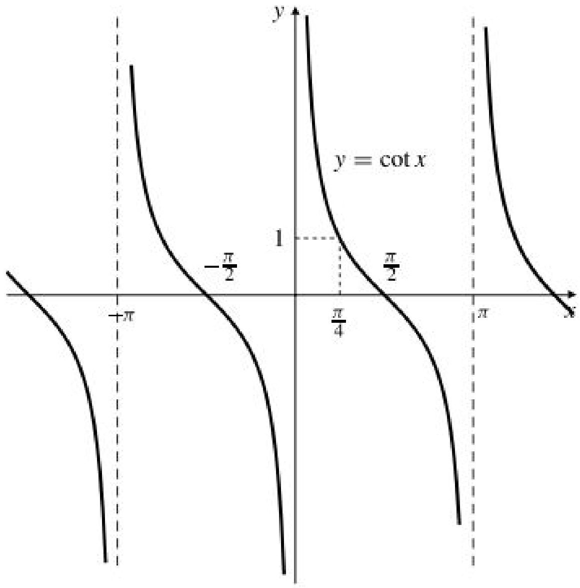

Figura P.78 Gráfica de $\cot x$.

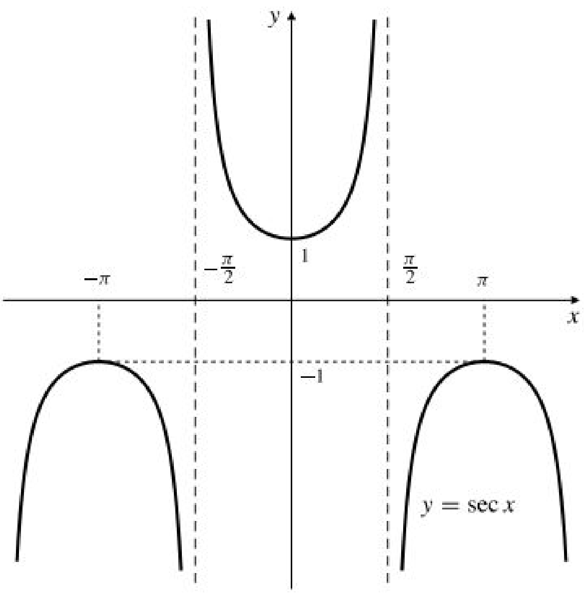

Figura P.79 Gráfica de $\sec x$.

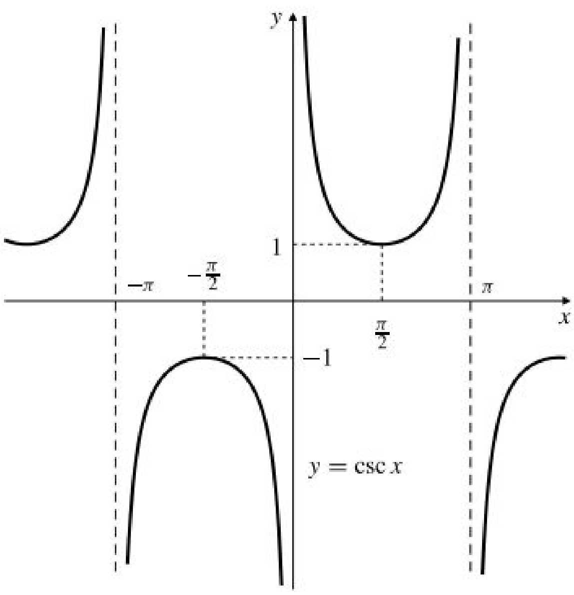

Figura P.80 Gráfica de $\csc x$.

DEFINICIÓN 8 Tangente, cotangente, secante y cosecante

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t}$$

$$\cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} = \frac{1}{\tan t} \qquad \csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t}$$

Obsérvese que todas las funciones anteriores están indefinidas (y su gráfica presenta una asíntota vertical) en los puntos donde la función del denominador de su definición vale cero. Ob-

sérvese también que la tangente, la cotangente y la cosecante son funciones impares y que la secante es una función par. Como $|\text{sen}\, x| \leqslant 1$ y $|\cos x| \leqslant 1$ para todo x, $|\csc x| \geqslant 1$ y $|\sec x| \geqslant 1$ en todos los puntos donde están definidas.

Las funciones seno, coseno y tangente se denominan **funciones trigonométricas primarias**, y sus inversas cosecante, secante y cotangente se denominan **funciones trigonométricas secundarias**. Las calculadoras científicas en general sólo llevan incorporadas las funciones primarias; para obtener las funciones secundarias basta con utilizar la tecla de inverso. La Figura P.81 muestra un diagrama de utilidad, denominada «regla CPST» de ayuda para recordar dónde son positivas las funciones primarias. Las tres son positivas en el primer cuadrante, marcado con P. De las tres, sólo el seno es positivo en el segundo cuadrante S, sólo la tangente en el tercer cuadrante T y sólo el coseno en el cuarto cuadrante C.

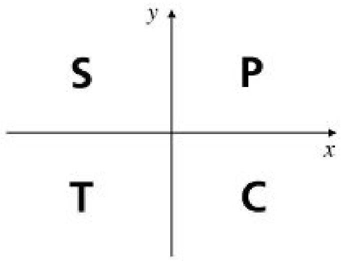

Figura P.81 La regla CPST.

Ejemplo 7 Calcule el seno y la tangente del ángulo θ en el intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ cuyo coseno vale $\cos\theta = -\frac{1}{3}$.

Solución Utilizando la igualdad de Pitágoras $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ se obtiene

$$\text{sen}^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\theta = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

La condición de que θ debe estar en el intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ lo sitúa en el tercer cuadrante. Por tanto, su seno será negativo. Así,

$$\text{sen}\,\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{-2\sqrt{2}/3}{-1/3} = 2\sqrt{2}$$

Como sus inversos coseno y seno, las funciones secante y cosecante son periódicas de periodo 2π. Sin embargo, la tangente y la cotangente tienen periodo π ya que

$$\tan(x+\pi) = \frac{\text{sen}\,(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\text{sen}\,x\cos\pi + \cos x\,\text{sen}\,\pi}{\cos x\cos\pi - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,\pi} = \frac{-\text{sen}\,x}{-\cos x} = \tan x$$

Dividiendo la identidad de Pitágoras $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$ por $\cos^2 x$ y $\text{sen}^2 x$, respectivamente, se obtienen dos versiones alternativas de dicha identidad que resultan de utilidad:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \quad \text{y} \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

A partir de las fórmulas de suma del seno y del coseno se pueden obtener las de la tangente y la cotangente. Por ejemplo,

$$\tan(s+t) = \frac{\text{sen}\,(s+t)}{\cos(s+t)} = \frac{\text{sen}\,s\cos t + \cos s\,\text{sen}\,t}{\cos s\cos t - \text{sen}\,s\,\text{sen}\,t}$$

Si ahora dividimos el numerador y el denominador de la fracción de la derecha por $\cos s \cos t$, se obtiene

$$\tan(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$

Sustituyendo t por $-t$ se llega a

$$\tan(s-t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

Cálculos con Maple

Maple conoce las seis funciones trigonométricas y puede calcular sus valores y manejarlas de diversas formas. Maple asume que los argumentos de las funciones trigonométricas se expresan en radianes.

```
> evalf(sin(30); evalf(sin(Pi/6));
```

$$-.9880316241$$
$$.5000000000$$

Nótese que Maple conoce la constante Pi (con la P mayúscula). La función `evalf()` transforma su argumento en un número en formato decimal en coma flotante con 10 dígitos significativos (la precisión se puede cambiar asignando un nuevo valor a la variable `Digits`). Si no se hace de esta forma, el seno de 30 radianes no se habría desarrollado, ya que no es un entero.

```
> Digits := 20; evalf(100*Pi); sin(30);
```

$$Digits := 20$$
$$314.15926535897932385$$
$$\operatorname{sen}(30)$$

A menudo es útil expresar las funciones trigonométricas de ángulos múltiplo como potencias del seno y coseno, y viceversa.

```
> expand(sin(5*x));
```

$$16\operatorname{sen}(x)\cos(x)^4 - 12\operatorname{sen}(x)\cos(x)^2 + \operatorname{sen}(x)$$

```
> combine((cos(x))^5, trig);
```

$$\frac{1}{16}\cos(5x) + \frac{5}{16}\cos(3x) + \frac{5}{8}\cos(x)$$

Otras funciones trigonométricas se pueden transformar en expresiones en función del seno y el coseno.

```
> convert(tan(4*x)*(sec(4*x))^2, sincos); combine(%, trig);
```

$$\frac{\operatorname{sen}(4x)}{\cos(4x)^3}$$

$$4\frac{\operatorname{sen}(4x)}{\cos(12x) + 3\cos(4x)}$$

El % en el último comando se refiere al resultado del cálculo anterior.

Repaso de trigonometría

Las funciones trigonométricas se denominan de esta forma porque frecuentemente se usan para expresar las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Como vimos al principio de esta sección, si θ es uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, podemos denominar los tres lados de dicho triángulo como ady (el cateto adyacente a θ), opu (el cateto opuesto a θ) e hip (la hipotenusa). Las funciones trigonométricas de θ se pueden expresar como relaciones de las longitudes de esos tres lados. Concretamente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opu}}{\text{hip}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opu}}{\text{ady}}$$

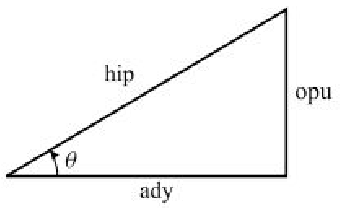

Figura P.82

Ejemplo 8 Calcule los lados desconocidos x e y del triángulo de la Figura P.83.

Solución En este caso, s es el lado opuesto e y es el lado adyacente al ángulo de 30°. La hipotenusa tiene una longitud de 5 unidades. Por tanto,

$$\frac{x}{5} = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \frac{y}{5} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

por lo que $x = \frac{5}{2}$ e $y = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ unidades.

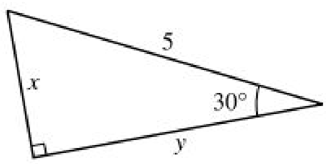

Figura P.83

Ejemplo 9 En el triángulo de la Figura P.84, exprese los lados x e y en función del cateto a y el ángulo θ.

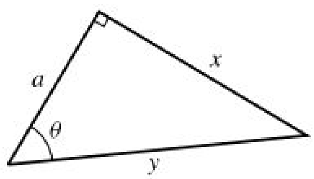

Figura P.84

Solución El cateto x es el opuesto al ángulo θ, e y es la hipotenusa. El cateto adyacente a θ es a. Por tanto,

$$\frac{x}{a} = \tan\theta \quad \text{y} \quad \frac{a}{y} = \cos\theta$$

Por tanto, $x = a\tan\theta$ e $y = \dfrac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta$.

Cuando se consideran triángulos generales (no necesariamente rectángulos), resulta conveniente etiquetar sus vértices con letras mayúsculas, que indicarán también los ángulos correspondientes a dichos vértices. Los lados opuestos a los vértices se indican con la letra correspondiente al vértice opuesto pero en minúsculas. *Véase* la Figura P.85. Las relaciones entre los lados a, b y c y los ángulos opuestos A, B y C en un triángulo cualquiera se expresan mediante las siguientes fórmulas, denominadas **Teorema del Seno** y **Teorema del Coseno**.

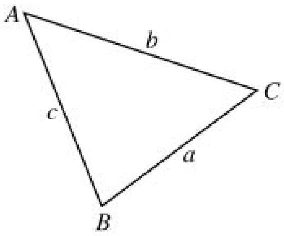

Figura P.85 Los lados de este triángulo se etiquetan de forma correspondiente con sus ángulos opuestos.

TEOREMA 3

Teorema del Seno: $$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Teorema del Coseno:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

DEMOSTRACIÓN *Véase* la Figura P.86. Sea h la longitud de la perpendicular que va desde A hasta el lado BC. Utilizando las fórmulas de los triángulos rectángulos (y la igualdad $\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$ si fuera necesario), se puede obtener que $c \operatorname{sen} B = h = b \operatorname{sen} C$. Entonces $(\operatorname{sen} B)/b = (\operatorname{sen} C)/c$. Por simetría, o bien trazando una nueva perpendicular a otro de los lados, ambas fracciones deben ser iguales a $(\operatorname{sen} A)/a$. Esto demuestra el Teorema del Seno. Para el Teorema del Coseno, obsérvese que

$$\begin{aligned} c^2 &= \begin{cases} h^2 + (a - b\cos C)^2 & \text{si} \quad C \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] h^2 + (a + b\cos(\pi - C))^2 & \text{si} \quad C > \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \\ &= h^2 + (a - b\cos C)^2 \qquad (\text{ya que } \cos(\pi - C) = -\cos C) \\ &= b^2 \operatorname{sen} C + a^2 - 2ab\cos C + b^2\cos^2 C \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

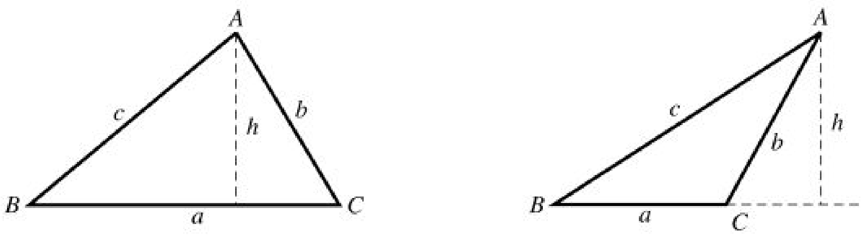

Figura P.86

Las otras versiones del Teorema del Coseno se demuestran de forma similar.

Ejemplo 10 Dos lados de un triángulo valen $a = 2$ y $b = 3$ y el ángulo $C = 40^\circ$. Calcule el lado c y el seno del ángulo B.

Solución A partir de la tercera versión del Teorema del Coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 4 + 9 - 12\cos 40^\circ \approx 13 - 12 \times 0{,}766 = 3{,}808$$

El lado c es de $\sqrt{3{,}808} = 1{,}951$ unidades de longitud. Utilizando ahora el Teorema del Seno se obtiene

$$\operatorname{sen} B = b\frac{\operatorname{sen} C}{c} \approx 3 \times \frac{\operatorname{sen} 40^\circ}{1{,}951} \approx \frac{3 \times 0{,}6428}{1{,}951} \approx 0{,}988$$

Un triángulo queda completamente determinado por uno cualquiera de los siguientes conjuntos de datos (que se corresponden con los casos conocidos de congruencia de triángulos en geometría clásica):

1. Dos lados y el ángulo entre ellos (*véase* el Ejemplo 10).
2. Tres lados, de forma que ninguno de ellos exceda en longitud a la suma de los otros dos.
3. Dos ángulos y un lado.
4. La hipotenusa y un cateto en el caso de un triángulo rectángulo.

En todos los casos anteriores siempre es posible obtener los lados y ángulos desconocidos utilizando el Teorema de Pitágoras o los Teoremas del Seno y del Coseno, y el hecho adicional de que la suma de los tres ángulos de un triángulo es siempre de 180° (o π radianes).

Un triángulo no queda completamente determinado conociendo sólo dos lados y un ángulo no contenido entre esos lados. Puede no existir ningún triángulo, un triángulo rectángulo, o dos triángulos no rectángulos que cumplan con esos datos.

Ejemplo 11 En un triángulo ABC, $B = 30^\circ$, $b = 2$ y $c = 3$. Calcule a.

Solución Se trata de un caso ambiguo. Utilizando el Teorema del Coseno,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$4 = a^2 + 9 - 6a(\sqrt{3}/2)$$

Por tanto, a debe cumplir la ecuación $a^2 - 3\sqrt{3}a + 5 = 0$. Utilizando la fórmula de la ecuación de segundo grado se obtiene

$$a = \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{27 - 20}}{2}$$
$$\approx 1{,}275 \quad \text{o} \quad 3{,}921$$

Es decir, existen dos triángulos coherentes con los datos dados, como se muestra en la Figura P.87.

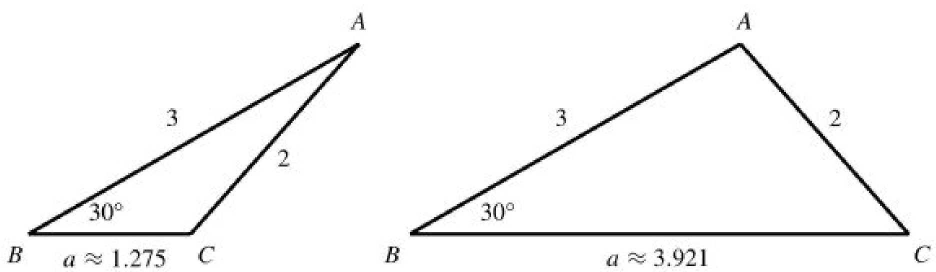

Figura P.87 Dos triángulos con $b = 2$, $c = 3$ y $B = 30^\circ$.

Ejercicios P.7

En los Ejercicios 1-6, calcule los diferentes valores utilizando las fórmulas presentadas en esta sección. No utilice tablas ni calculadora.

1. $\cos\frac{3\pi}{4}$ **2.** $\tan -\frac{3\pi}{4}$ **3.** $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$

4. $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$ **5.** $\cos\frac{5\pi}{12}$ **6.** $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{12}$

En los Ejercicios 7-12, exprese las cantidades dadas en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

7. $\cos(\pi + x)$ **8.** $\operatorname{sen}(2\pi - x)$ **9.** $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

10. $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ **11.** $\tan x + \cot x$ **12.** $\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x}$

En los Ejercicios 13-16, demuestre las igualdades.

13. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos(2x)$

14. $\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \tan\frac{x}{2}$

15. $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2\frac{x}{2}$

16. $\frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \sec 2x - \tan 2x$

17. Exprese $\operatorname{sen} 3x$ en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

18. Exprese $\cos 3x$ en función de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.

En los Ejercicios 19-22, dibuje las gráficas de las funciones dadas. ¿Cuál es el periodo de cada función?

19. $f(x) = \cos 2x$ **20.** $f(x) = \operatorname{sen}\frac{x}{2}$

21. $f(x) = \operatorname{sen}\pi x$ **22.** $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$

23. Dibuje la gráfica de $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

24. Dibuje la gráfica de $y = 1 + \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

En los Ejercicios 25-30, se da $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ o $\tan\theta$. Calcule los otros dos valores sabiendo que θ pertenece al intervalo especificado.

25. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, θ en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

26. $\tan\theta = 2$, θ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

27. $\cos\theta = \frac{1}{3}$, θ en $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

28. $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, θ en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

29. $\operatorname{sen}\theta = \frac{-1}{2}$, θ en $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

30. $\tan\theta = \frac{1}{2}$, θ en $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Repaso de trigonometría

En los Ejercicios 31-42, ABC es un triángulo cuyo ángulo C es recto. Los lados opuestos a los ángulos A, B y C son, respectivamente, a, b y c (*véase* la Figura P.88).

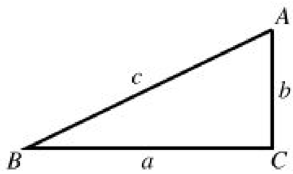

Figura P.88

31. Calcule a y b si $c = 2$, $B = \frac{\pi}{3}$.

32. Calcule a y c si $b = 2$, $B = \frac{\pi}{3}$.

33. Calcule b y c si $a = 5$, $B = \frac{\pi}{6}$.

34. Exprese a en función de A y c.

35. Exprese a en función de A y b.

36. Exprese a en función de B y c.

37. Exprese a en función de B y b.

38. Exprese c en función de A y a.

39. Exprese c en función de A y b.

40. Exprese $\operatorname{sen} A$ en función de a y c.

41. Exprese $\operatorname{sen} A$ en función de b y c.

42. Exprese $\operatorname{sen} A$ en función de a y b.

En los Ejercicios 43-50, ABC es un triángulo arbitrario. Los lados opuestos a los ángulos A, B y C son, respectivamente, a, b y c (*véase* la Figura P.89). Calcule las cantidades que se piden. Utilice tablas o una calculadora científica si es necesario.

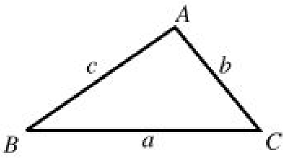

Figura P.89

43. Calcule $\operatorname{sen} B$ si $a = 4$, $b = 3$, $A = \dfrac{\pi}{4}$.

44. Calcule $\cos A$ si $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$.

45. Calcule $\operatorname{sen} B$ si $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$.

46. Calcule c si $a = 2$, $b = 3$, $C = \dfrac{\pi}{4}$.

47. Calcule a si $c = 3$, $A = \dfrac{\pi}{4}$, $B = \dfrac{\pi}{3}$.

48. Calcule c si $a = 2$, $b = 3$, $C = 35^{\circ}$.

49. Calcule b si $a = 4$, $B = 40^{\circ}$, $C = 70^{\circ}$.

50. Calcule c si $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, $A = 30^{\circ}$ (hay dos soluciones posibles).

51. Dos personas estiran dos cuerdas desde la punta de un poste vertical, que denominaremos T, hasta dos puntos B y C en el suelo. C está 10 m más cerca de la base del poste que B. Si la cuerda BT forma un ángulo de 35° con la horizontal, y la cuerda CT forma un ángulo de 50° con la horizontal, ¿cuál es la altura del poste?

52. Dos observadores situados en dos puntos A y B distantes entre sí 2 km miden simultáneamente el ángulo de elevación de un globo meteorológico, y obtienen respectivamente medidas de 40° y 70°. Si el globo está exactamente sobre un punto de la recta que une A y B, calcule la altura del globo.

53. Demuestre que el área de un triángulo ABC se puede calcular mediante la expresión

$$(1/2)ab \operatorname{sen} C = (1/2)bc \operatorname{sen} A = (1/2)ca \operatorname{sen} B$$

*__54.__ Demuestre que el área de un triángulo ABC se puede expresar como $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, siendo $s = (a+b+c)/2$ el semiperímetro del triángulo.

* Este símbolo se utiliza en el libro para indicar los ejercicios que son algo más difíciles y/o teóricos que el resto.

CAPÍTULO 1

Límites y continuidad

Todo cuerpo continúa en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme, a no ser que se lo obligue a salir de ese estado mediante la aplicación de fuerzas sobre él.

Isaac Newton (1642-1727)
de *Principia Mathematica, 1687*

Hasta que Leibniz y Newton, mediante el descubrimiento del cálculo diferencial, dispersaron las antiguas tinieblas que envolvían el concepto de infinito, estableciendo claramente los conceptos de continuo y de cambio continuo, no se pudieron realizar aplicaciones provechosas de los nuevos conceptos de mecánica obtenidos por el progreso.

Hermann von Helmholtz (1821-1894)

Introducción El cálculo se creó para describir cómo cambian las cantidades. Tiene dos procedimientos básicos opuestos entre sí:

- *Diferenciación*, para obtener la tasa o velocidad de cambio de una función dada.
- *Integración*, para obtener una función con una determinada tasa o velocidad de cambio.

Ambos procedimientos se basan en el concepto fundamental de *límite* de una función. La idea de límite es lo que distingue el cálculo del álgebra, la geometría y la trigonometría, creadas para describir situaciones estáticas.

En este capítulo presentaremos el concepto de límite y desarrollaremos algunas de sus propiedades. Comenzaremos considerando cómo surge el concepto de límite en algunos problemas básicos.

1.1 Ejemplos de velocidad, tasa de crecimiento y área

En esta sección consideraremos algunos ejemplos de fenómenos donde surgen de forma natural los límites.

Velocidad media y velocidad instantánea

La posición de un objeto móvil es función del tiempo. La velocidad media de un objeto en un intervalo de tiempo se obtiene dividiendo el cambio en la posición del objeto por la longitud del intervalo de tiempo.

Ejemplo 1 **(Velocidad media de una piedra que cae)** Los experimentos físicos muestran que si se deja caer una piedra desde cerca de la superficie terrestre, partiendo del reposo, en los primeros t segundos habrá recorrido una distancia

$$y = 4.9t^2 \text{ m}$$

(a) ¿Cuál será la velocidad media de una piedra que cae en esas condiciones durante los primeros 2 s?

(b) ¿Cuál será la velocidad media desde $t = 1$ hasta $t = 2$?

Solución La *velocidad media* de una piedra que cae en cualquier intervalo temporal $[t_1, t_2]$ es el cambio Δy en la distancia de caída recorrida dividido por la longitud del intervalo temporal Δt:

$$\text{Velocidad media en } [t_1, t_2] = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9t_2^2 - 4.9t_1^2}{t_2 - t_1}$$

(a) En los primeros 2 s (intervalo temporal [0, 2]), la velocidad media es

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2^2) - 4.9(0^2)}{2 - 0} = 9.8 \text{ m/s}$$

(b) En el intervalo temporal [1, 2], la velocidad media es

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2^2) - 4.9(1^2)}{2 - 1} = 14.7 \text{ m/s}$$

Ejemplo 2 ¿Con qué velocidad cae la roca del ejemplo 1: (a) en el instante $t = 1$, (b) en el instante $t = 2$?

Solución Es posible calcular la velocidad media en cualquier intervalo de tiempo, pero ahora la pregunta es sobre la *velocidad instantánea* en un instante determinado. Si la piedra tuviera un velocímetro, ¿qué indicaría en el instante $t = 1$? Para responder a esta pregunta, escribiremos primero la velocidad media en el intervalo $[1, 1 + h]$, que empieza en $t = 1$ y tiene longitud h:

$$\text{Velocidad media en } [1, 1 + h] = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(1 + h)^2 - 4.9(1^2)}{h}$$

No se puede calcular la velocidad instantánea haciendo $h = 0$ en la expresión anterior, porque no se puede dividir por cero. Sin embargo, es posible calcular velocidades medias en intervalos temporales cada vez más pequeños, y ver si los resultados se acercan a algún valor particular. La Tabla 1 muestra los valores de $\Delta y/\Delta t$ a medida que los valores de h se van acercando a cero. Parece que las velocidades medias se acercan más y más al valor de 9.8 m/s a medida que el intervalo temporal se va acercando más y más a cero. Esto sugiere que la piedra cae con una velocidad de 9.8 m/s, un segundo después de iniciar su caída.

De forma similar, la Tabla 2 muestra las velocidades medias sobre intervalos cada vez más cortos $[2, 2 + h]$, empezando en $t = 2$. Los valores sugieren que la piedra cae con una velocidad de 19.6 m/s, dos segundos después de iniciar su caída.

Tabla 1. Velocidad media en el intervalo $[1, 1+h]$

h	$\Delta y/\Delta t$
1	14.7000
0.1	10.2900
0.01	9.8490
0.001	9.8049
0.0001	9.8005

Tabla 2. Velocidad media en el intervalo $[2, 2+h]$

h	$\Delta y/\Delta t$
1	24.5000
0.1	20.0900
0.01	19.6490
0.001	19.6049
0.0001	19.6005

En el Ejemplo 2 la velocidad media de la piedra que cae en el intervalo temporal $[t, t+h]$ es

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h}$$

Para obtener la velocidad instantánea (denominada a menudo simplemente *velocidad*) en los instantes $t = 1$ y $t = 2$, se examinan los valores de dicha velocidad promedio en intervalos temporales cuya longitud h va disminuyendo más y más. De hecho, lo que estamos obteniendo es el *límite de la velocidad media cuando h se aproxima a cero.* Esto se expresa simbólicamente de la siguiente forma:

$$\text{Velocidad en el instante } t = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h}$$

El símbolo $\lim\limits_{h \to 0}$ se lee «límite cuando h tiende a cero de...». No se puede obtener el límite de la fracción simplemente sustituyendo $h = 0$, ya que eso implicaría dividir por cero. Sin embargo, el límite se puede calcular realizando algunas simplificaciones algebraicas en la expresión de la velocidad media.

Ejemplo 3 Simplifique la expresión de la velocidad media de la piedra que cae en el intervalo $[t, t+h]$, desarrollando primero $(t+h)^2$. Teniendo en cuenta el resultado anterior, calcule la velocidad de la piedra que cae directamente como una función de t, sin hacer uso de la tabla de valores.

Solución La velocidad media en el intervalo $[t, t+h]$ es

$$\begin{aligned}\frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} &= \frac{4.9(t^2 + 2th + h^2 - t^2)}{h} \\ &= \frac{4.9(2th + h^2)}{h} \\ &= 9.8t + 4.9h\end{aligned}$$

La forma final de la expresión ya no contiene ninguna división por h. El valor al que tiende dicha expresión cuando h tiende a cero es $9.8t + 4.9(0) = 9.8t$. Por tanto, t segundos después de soltar la piedra, su velocidad será de $9.8t$ m/s. En particular, en $t = 1$ y $t = 2$ las velocidades son de 9.8 m/s y 19.6 m/s, respectivamente.

Crecimiento de un cultivo de algas

En un experimento de laboratorio, se mide la biomasa de un cultivo de algas durante un periodo de 74 días midiendo el área en milímetros cuadrados ocupada por el cultivo sobre un cristal de microscopio. Se dibuja la gráfica de las medidas m en función del tiempo (en días), y los puntos se unen mediante una curva suave $m = f(t)$, como se muestra en la Figura 1.1.

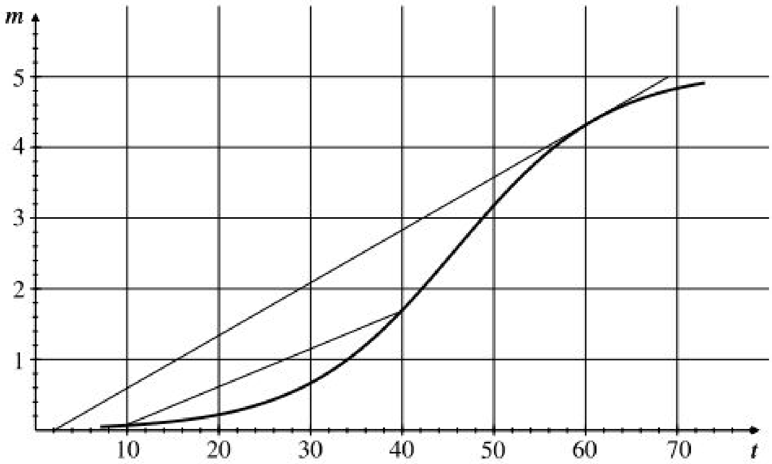

Figura 1.1 Biomasa m de un cultivo de algas transcurridos t días.

Obsérvese que la biomasa era de aproximadamente 0.1 mm^2 el día 10 y había crecido hasta aproximadamente 1.7 mm^2 en el día 40, un incremento de $1.7 - 0.1 = 1.6$ mm^2 en un intervalo de $40 - 10 = 30$ días. La tasa media de crecimiento en el intervalo desde el día 10 hasta el día 40 fue, por tanto, de

$$\frac{1.7 - 0.1}{40 - 10} = \frac{1.6}{30} \approx 0.053 \text{ mm}^2/\text{d}$$

Este promedio es exactamente la pendiente de la recta que une los puntos de la gráfica de $m = f(t)$ correspondientes a $t = 10$ y $t = 40$. De forma similar, la tasa media de crecimiento de la biomasa de algas en cualquier intervalo de tiempo se puede determinar midiendo la pendiente de la recta que une los puntos de la curva correspondientes a dicho intervalo de tiempo. Este tipo de rectas se denominan **secantes** de la curva.

Ejemplo 4 ¿Con qué velocidad crece la biomasa en el día 60?

Solución Para responder a esta pregunta, se pueden medir las tasas medias de crecimiento en intervalos de tiempo cada vez más cortos a partir del día 60. Las correspondientes secantes se van haciendo cada vez más cortas, pero sus pendientes se van aproximando a un *límite*, concretamente, la pendiente de la **recta tangente** a la gráfica $m = f(t)$ en el punto $t = 60$. La Figura 1.1 muestra la recta tangente, que pasa por los puntos (2, 0) y (69, 5), por lo que su pendiente es

$$\frac{5 - 0}{69 - 2} \approx 0.0746 \text{ mm}^2/\text{d}$$

Éste es el valor de la tasa de crecimiento de la biomasa en el día 60. ■

Área de un círculo

Todos los círculos son figuras geométricas similares. Todos tienen la misma forma y se diferencian únicamente en su tamaño. El cociente de la longitud de la circunferencia C y el diámetro $2r$ vale lo mismo en todos los círculos. Esta razón común es el número π:

$$\frac{C}{2r} = \pi \quad \text{o} \quad C = 2\pi r$$

En el colegio nos enseñaron que el área del círculo vale π multiplicado por el cuadrado del radio:

$$A = \pi r^2$$

¿Cómo se puede deducir la fórmula del área a partir de la fórmula de la longitud de la circunferencia, que es la definición de π?

La respuesta a esta pregunta es considerar al círculo como «límite» de una serie de polígonos regulares, que a su vez están constituidos por triángulos, figura cuya geometría ya conocemos en profundidad.

Sea un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r (*véase* la Figura 1.2). El perímetro P_n y el área A_n son, respectivamente, menores que la longitud de la circunferencia C y el área del círculo A. No obstante, si n es grande, *P_n tiene un valor cercano a C* y *A_n tiene un valor cercano a A*. De hecho, la circunferencia que se muestra en la Figura 1.2 es en realidad un polígono regular de 180 lados, de forma que cada lado abarca un ángulo de 2° desde el centro de la circunferencia. Es muy difícil distinguir este polígono de 180 lados de una circunferencia real. Por tanto, es razonable esperar que P_n se aproxime al límite C y que A_n se aproxime al límite A, a medida que n se hace más y más grande y se aproxima a infinito.

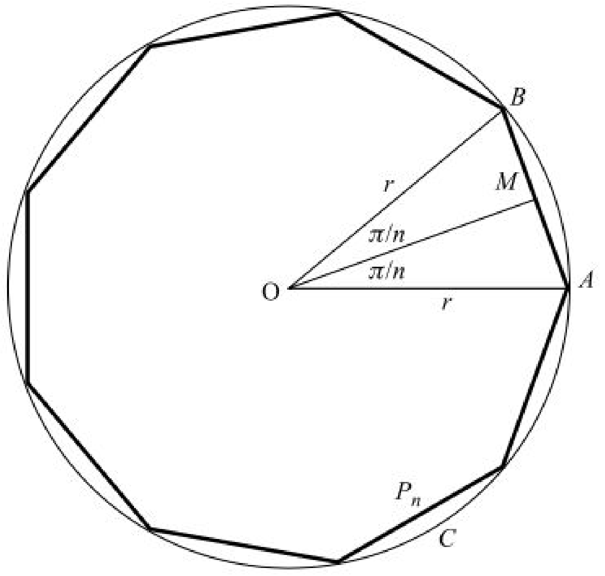

Figura 1.2 Un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia.

Un polígono regular de n lados se puede considerar como la unión no solapada de n triángulos isósceles, todos ellos con un vértice común en O, el centro del polígono. En la Figura 1.2 se muestra uno de esos triángulos $\triangle OAB$. Como el ángulo total alrededor del punto O suma 2π radianes (asumimos una circunferencia de radio 1 y longitud 2π), el ángulo AOB vale $2\pi/n$ radianes. Sea M el punto medio entre A y B; entonces, la recta OM divide al ángulo AOB en dos partes iguales. Utilizando trigonometría elemental, se puede expresar la longitud de AB y el área del triángulo OAB en función del radio r del círculo:

$$|AB| = 2|AM| = 2r\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}$$

$$\text{área } OAB = \frac{1}{2}\,|AB|\,|OM| = \frac{1}{2}\left(2r\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}\right)\left(r\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$= r^2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{n}\,\cos\frac{\pi}{n}$$

El perímetro P_n y el área A_n se obtienen multiplicando por n las expresiones anteriores:

$$P_n = 2rn\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}$$

$$A_n = r^2 n\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}$$

Despejando en la primera ecuación $rn\,\mathrm{sen}\,(\pi/n) = P_n/2$ y sustituyendo en la segunda ecuación, se obtiene

$$A_n = \left(\frac{P_n}{2}\right) r\cos\frac{\pi}{n}$$

El ángulo AOM se aproxima a 0 a medida que n crece. Por tanto, su coseno, $\cos(\pi/n) = |OM|/|OA|$, se aproxima a 1. Como P_n se aproxima a $2\pi r$ cuando n crece, la expresión de A_n se aproxima a $(2\pi r/2)r(1) = \pi r^2$, que por tanto debe ser al área del círculo.

Ejercicios 1.1

Los Ejercicios 1-4 se refieren a un objeto que se mueve a lo largo del eje x, de forma que en el instante t su posición es de $x = t^2 m$ a la derecha del origen.

1. Calcule la velocidad media del objeto en el intervalo temporal $[t, t + h]$.

2. Construya una tabla que muestre las velocidades medias del objeto en los intervalos temporales $[2, 2 + h]$ para $h = 1$, 0.1, 0.01, 0.001 y 0.0001 s.

3. Utilice los resultados del Ejercicio 2 para plantear cuál podría ser la velocidad instantánea del objeto en $t=2$ s.

4. Confirme su planteamiento del Ejercicio 3 calculando el límite de la velocidad media en el intervalo $[2, 2 + h]$ cuando h tiende a cero, utilizando el método del Ejemplo 3.

Los Ejercicios 5-8 se refieren a una partícula que se mueve por el eje x de forma que su posición en el instante t se expresa como $x = 3t^2 - 12t + 1$ m.

5. Calcule la velocidad media de la partícula en los intervalos de tiempo [1, 2], [2, 3] y [1, 3].

6. Utilice el método del Ejemplo 3 para calcular la velocidad de la partícula en $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

7. ¿En qué dirección se mueve la partícula en $t = 1$? ¿Y en $t = 2$? ¿Y en $t = 3$?

8. Demuestre que para todo número positivo k, la velocidad media de la partícula en el intervalo temporal $[t - k, t + k]$ es igual a su velocidad en el instante t.

En los Ejercicios 9-11, un peso que está suspendido de un muelle oscila arriba y abajo, de forma que su altura sobre el suelo en el instante t es de y pies, con

$$y = 2 + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}\,(\pi t)$$

9. Dibuje la gráfica de y como función de t. ¿A qué altura está el peso en $t = 1$ s? ¿En qué dirección se está moviendo en ese instante?

10. ¿Cuál es la velocidad media del peso en los intervalos temporales [1, 2], [1, 1.1], [1, 1.01] y [1, 1.001]?

11. Utilizando los resultados del Ejercicio 10, estime la velocidad del peso en el instante $t = 1$. ¿Cuál es el significado del signo del resultado?

Los Ejercicios 12 y 13 se refieren a la evolución de la biomasa de algas que se muestra en la Figura 1.1.

12. ¿Con qué velocidad aproximada está creciendo la biomasa en el día 20?

13. ¿Qué día, aproximadamente, crece más rápido la biomasa?

14. Los beneficios de una pequeña empresa durante cinco años de operaciones se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3

Año	Beneficio (1000 s €)
2000	6
2001	27
2002	62
2003	111
2004	174

(a) Dibuje los puntos que representan el beneficio en función del año en papel milimetrado, y únalos con una curva suave.

(b) ¿Cuál es la tasa media de incremento en el beneficio entre 2002 y 2004?

(c) Utilice la gráfica para estimar la tasa de crecimiento de los beneficios en 2002.